

Números Complexos 1

1. (Fuvest) Determine os números complexos z que satisfazem, simultaneamente,

$$|z| = 2 \quad \text{e} \quad \text{Im} = \frac{z-1}{1+i} = \frac{1}{2}.$$

Lembretes: $i^2 = -1$, se $w = a + bi$, com a e b reais, então $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\text{Im}(w) = b$.

2. (Fuvest) Considere a equação $z^2 = \acute{a}z + (\acute{a} - 1)Z$, onde \acute{a} é um número real e Z indica o conjugado do número complexo z .

- Determinar os valores de \acute{a} para os quais a equação tem quatro raízes distintas.
- Representar, no plano complexo, as raízes dessa equação quando $\acute{a} = 0$.

3. (Unicamp 2014) O módulo do número complexo $z = i^{2014} - i^{1987}$ é igual a

- $\sqrt{2}$.
- 0.
- $\sqrt{3}$.
- 1.

4. (Unicamp 2013) Chamamos de unidade imaginária e denotamos por i o número complexo tal que $i^2 = -1$.

Então $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{2013}$ vale

- 0.
- 1.
- i .
- $1+i$.

5. (Unicamp) Um número complexo $z = x + iy$, $z \neq 0$, pode ser escrito na forma trigonométrica: $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$, onde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \theta = \frac{x}{|z|}$ e $\sin \theta = \frac{y}{|z|}$. Essa forma de representar os números complexos não-nulos é muito conveniente, especialmente para o cálculo de potências inteiras de números complexos, em virtude da fórmula de De Moivre:

$$[|z| (\cos \theta + i \sin \theta)]^t = |z|^t (\cos t\theta + i \sin t\theta)$$

que é válida para todo $t \in \mathbb{Z}$. Use essas informações para:

- Calcular $(\sqrt{3} + i)^{12}$
- Sendo $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, calcular o valor de $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{15}$.

6. (Unicamp) Considere a função quadrática $f(x) = x^2 + x \cos \alpha + \sin \alpha$.

a) Resolva a equação $f(x) = 0$ para $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

b) Encontre os valores de α para os quais o número complexo $\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ é raiz da equação $f(x) + 1 = 0$.

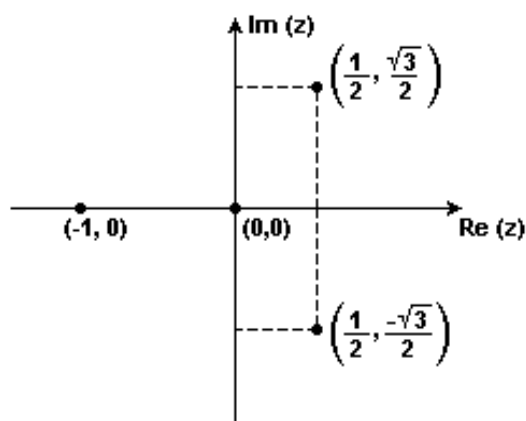
Gabarito

1. $z = 2i$ ou $z = -2$

2. a) $\alpha < 3/4$ e $\alpha \neq 1/2$

b) Se $\alpha = 0$, temos: $z = 0$ ou $z = -1$ ou $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cuja representação no plano complexo é:



3. A

4. D

5. a) 4096

b) 0

6. a) $V = \{-1; 1\}$

b) $\alpha = \pi + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z}$