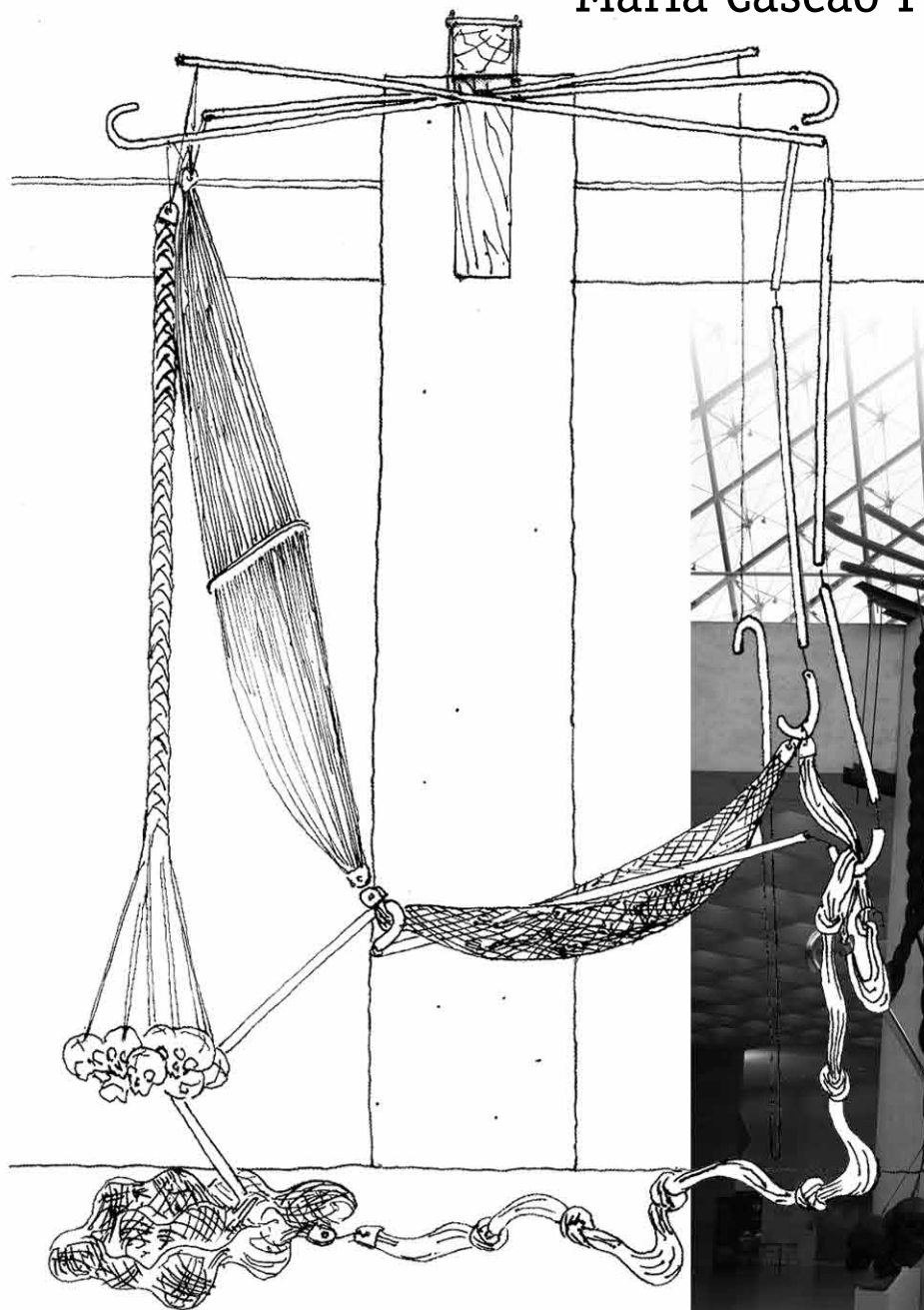


Maria Cascão Ferreira de Almeida



Projeto estrutural e da montagem da escultura em aço do artista plástico Tunga - "À La Lumière des deux mondes" para o Museu do Louvre em celebração ao Ano do Brasil na França, 2008.



Com muita satisfação e orgulho, aceitei a tarefa de escrever o prefácio do primeiro volume – Estruturas Isostáticas – do “Curso de Análise Estrutural” de minha ex-aluna Maria Cascão Ferreira de Almeida, professora do Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia da Universidade Federal de Juiz de Fora, no período de 1994 a 2002, quando passou a integrar o Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Há muito, estão esgotadas as obras de Ademar Fonseca, Sydney Santos e Sussekind. Antes de mais nada, pois, o livro da Maria Cascão vem suprimir essa falta. O conteúdo é completo; as linhas de estado e linhas de influência das estruturas isostáticas planas e espaciais, dos diferentes tipos – vigas, pórticos, treliças – são detalhadas cuidadosamente. Inúmeros exercícios são oferecidos, muitos dos quais, resolvidos passo a passo. Em tudo, a exposição é extremamente didática, num estilo de entendimento muito fácil, agradável. Destaco os exemplos introdutórios com que procura mostrar ao estudante o que significa uma estrutura.

O estudo da Análise Estrutural, em seus fundamentos tão bem expostos por Maria Cascão, é indispensável para que o engenheiro, que se dedicará às estruturas, possa utilizar com segurança os inúmeros programas computacionais que, fora de dúvida, são necessários, mas que requerem adequada interpretação.

Finalizo este breve prefácio, desejando à autora que prossiga na publicação dos(s) volume(s) dedicado(s) às estruturas hiperestáticas. O sucesso é garantido.

Dirceu de Alencar Velloso

(In memoriam)

Engenheiro civil - D.sc., professor livre docente em engenharia e também titular pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

Foi presidente da Associação Brasileira de Mecânica dos Solos e Engenharia Geotécnica (ABMS) e recebeu título de professor emérito da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro em 2005.

Profissionalmente reconhecido como engenheiro de fundações, onde atuou por mais de trinta anos, sendo admirado e respeitado pela comunidade técnica.

	1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS	
1.1	CONCEITO GERAL DE ESTRUTURAS	11
1.2	CONCEITO ESPECÍFICO DE ESTRUTURAS	13
1.3	TIPOS DE ELEMENTOS ESTRUTURAIIS	15
1.4	ESFORÇOS OU AÇÕES	17
1.5	FORÇAS APLICADAS	17
1.6	OBJETIVOS DA ANÁLISE ESTRUTURAL	18
1.7	ESTRUTURAS RETICULARES	19
	2 CONCEITOS BÁSICOS DA ESTÁTICA	21
2.1	GRANDEZAS FUNDAMENTAIS	21
	2.1.1 Força	21
	2.1.2 Momento	22
2.2	SISTEMAS DE FORÇAS	23
	2.2.1 Redução de sistemas de forças a um ponto	23
	Exercício 2.1	24
	Exercício 2.2	24
2.3	EQUILÍBRIO ESTÁTICO	24
	2.3.1 Deslocamentos associados	24
	2.3.2 Graus de liberdade	25
	2.3.3 Apoios	25
	2.3.4 Equações do equilíbrio estático	25
2.4	ESQUEMAS E SIMPLIFICAÇÕES DE CÁLCULO	26
	2.4.1 Simplificações geométricas	26
	2.4.2 Representação das forças aplicadas (carregamentos)	27
	2.4.3 Simplificações analíticas	30
	2.4.4 Representação dos apoios	31
	2.4.5 Idealização de um modelo	32
2.5	REAÇÕES DE APOIO	32
	2.5.1 Viga biapoiada	32
	2.5.2 Pórtico plano	33
	2.5.3 Cálculo das reações de apoio para carregamentos distribuídos	34
	2.5.4 Cálculo das reações de apoio para momentos concentrados	36
	Exercício 2.3	36
2.6	ESTATICIDADE E ESTABILIDADE DE MODELOS PLANOS	37
	2.6.1 Estruturas externamente isostáticas	37
	2.6.2 Estruturas externamente hiperestáticas	38
	2.6.3 Estruturas externamente hipostáticas	38
	2.6.4 Estruturas reais	39
	3 ESFORÇOS SOLICITANTES INTERNOS	41
3.1	ESFORÇOS INTERNOS EM ESTRUTURAS PLANAS	44
3.2	CÁLCULO DOS ESFORÇOS INTERNOS EM UMA SEÇÃO S	45
	Exercício 3.1	46
	Exercício 3.2	49
3.3	RELAÇÕES FUNDAMENTAIS DA ESTÁTICA	50
	3.3.1 Relação entre esforços normais $N(x)$ e cargas axiais distribuídas $p(x)$	51
	3.3.2 Relação entre carregamento transversal e esforços cortantes e momentos fletores	51
3.4	FUNÇÕES E DIAGRAMAS DOS ESFORÇOS SOLICITANTES INTERNOS	53

	4 VIGAS ISOSTÁTICAS	57
4.1	VIGAS SIMPLES	58
	4.1.1 Vigas Biapoiadas	58
	Exercício 4.1	58
	Exercício 4.2	60
	Exercício 4.3	61
	Exercício 4.4	63
	Exercício 4.5	64
	Exercício 4.6	66
	Exercício 4.7	67
	Exercício 4.8	68
	Exercício 4.9	70
4.2	ASPECTOS RELEVANTES PARA O TRAÇADO DOS DIAGRAMAS	71
4.3	PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO	73
	Exercício 4.10	73
4.4	VIGAS ENGASTADAS E LIVRES	75
	Exercício 4.11	75
	Exercício 4.12	77
	Exercício 4.13	78
4.5	VIGAS BIAPOIADAS COM BALANÇOS	79
	Exercício 4.14	79
	Exercício 4.15	80
	Exercício 4.16	81
4.6	VIGAS GERBER	81
	4.6.1 Equações de Condição	82
	4.6.2 Solução por meio das Equações de Condição	84
	Exercício 4.17	84
4.7	VIGAS INCLINADAS	85
	4.7.1 Carregamentos distribuídos ao longo das projeções	86
	4.7.2 Carregamentos distribuídos ao longo da viga inclinada	87
	5 PÓRTICOS OU QUADROS ISOSTÁTICOS PLANOS	89
5.1	EIXOS GLOBAIS E EIXOS LOCAIS	91
	5.1.1 Eixos Globais	91
	5.1.2 Eixos Locais	91
5.2	ELEMENTOS DOS PÓRTICOS PLANOS	92
5.3	PÓRTICOS SIMPLES	92
	5.3.1 Pórtico Biapoiado	92
	Exercício 5.1	92
	5.3.2 Pórtico Engastado e Livre	94
	5.3.3 Pórtico Triarticulado	94
	Exercício 5.2	95
	5.3.4 Pórtico Biapoiado com Articulação e Tirante (ou Escora)	96
	Exercício 5.3	96
5.4	PÓRTICOS OU QUADROS COM BARRAS CURVAS	98
	5.4.1 Eixos curvos	99
	Exercício 5.4	101
5.5	QUADROS COMPOSTOS (ESTRUTURAS COMPOSTAS)	104
	6 TRELIÇAS ISOSTÁTICAS	105
6.1	LEI DE FORMAÇÃO DAS TRELIÇAS SIMPLES	108
6.2	MÉTODOS DE ANÁLISE DAS TRELIÇAS	108
6.3	ESTATICIDADE E ESTABILIDADE DAS TRELIÇAS	109

	Exercício 6.1	112
6.4	MÉTODO DOS NÓS	112
	Exercício 6.2	113
6.5	MÉTODO DE MAXWELL CREMONA	114
6.6	MÉTODO DAS SEÇÕES (MÉTODO DE RITTER)	116
6.7	OBSERVAÇÕES GERAIS SOBRE AS TRELIÇAS	118
6.8	TRELIÇAS COM CARGAS FORA DOS NÓS	119
	Exercício 6.3	120
6.9	TRELIÇAS COMPOSTAS	122
6.10	MÉTODO DE RESOLUÇÃO DAS TRELIÇAS COMPOSTAS	123
	Exercício 6.4	124
	Exercício 6.5	124
6.11	TRELIÇAS COMPLEXAS	127
	Exercício 6.6	127
	7 ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS NO ESPAÇO	131
7.1	TRELIÇAS ESPACIAIS	132
	7.1.1 Verificação da estaticidade	132
	7.1.2 Lei de formação das treliças simples espaciais	133
	7.1.3 Resolução das treliças simples espaciais	133
	Exercício 7.1	134
	7.1.4 Classificação das treliças espaciais	135
7.2	GRELHAS	135
	Exercício 7.2	137
	Exercício 7.3	138
7.3	ESTRUTURA PLANA SUBMETIDA A CARREGAMENTO QUALQUER	140
7.4	PÓRTICOS ESPACIAIS ISOSTÁTICOS	140
	Exercício 7.4	141
	8 LINHAS DE INFLUÊNCIA DE ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS	143
8.1	CONCEITO	143
8.2	TRAÇADO DAS LINHAS DE INFLUÊNCIA	144
8.3	MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DAS LI DAS ESTRUTURAS ISOSTÁTICAS	145
	8.3.1 Método Analítico	145
	8.3.2 Método das Deformadas Verticais	148
8.4	VIGAS GERBER	152
8.5	TRELIÇAS	154
8.6	DEFINIÇÃO DO TREM-TIPO	159
8.7	APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO	161
8.8	PESQUISA DOS VALORES MÁXIMOS (MÁX+) E MÍNIMOS (MÁX-)	161
8.9	OBJETIVO DAS LINHAS DE INFLUÊNCIA EM PROJETOS DE ESTRUTURAS SUBMETIDAS À CARGAS MÓVEIS	162
	Exercício 8.1	163

1.1 CONCEITO GERAL DE ESTRUTURAS

Uma estrutura pode ser definida como uma composição de uma ou mais peças, ligadas entre si e ao meio exterior de modo a formar um sistema em equilíbrio. Tal equilíbrio pode ser **estático** (estudado na graduação) ou **dinâmico** (estudado, em geral, na pós-graduação). Este livro aborda a **Análise Estática**.

Uma estrutura é, portanto, um conjunto capaz de receber solicitações externas, denominadas ativas, absorvê-las internamente e transmiti-las até seus apoios ou vínculos, onde elas encontram um sistema de forças externas equilibrantes, denominadas forças reativas.

Inúmeros são os exemplos de estruturas (Fig. 1.1): árvore, corpo humano, cadeira, entre outros. Na Engenharia, em particular, o conceito de estrutura está associado à área de interesse. Desta forma são estruturas:

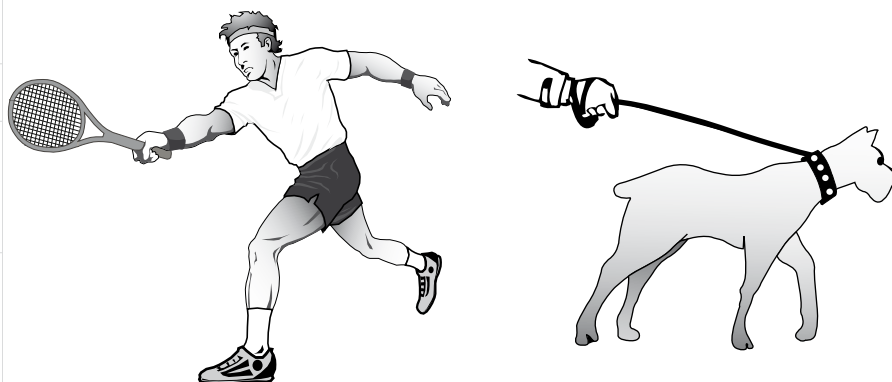


Fig. 1.1 Exemplos gerais de estruturas

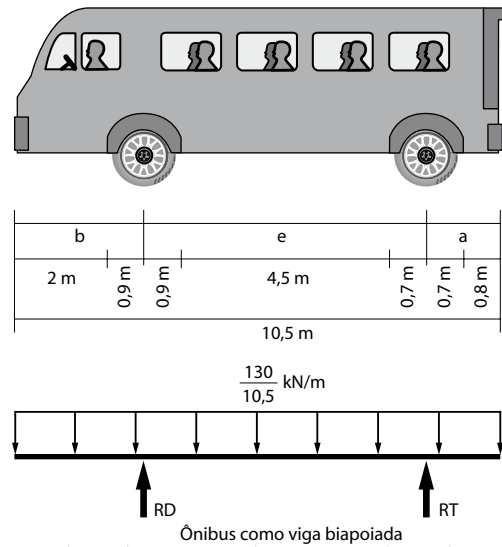


FIG. 1.4 Veículos automotores e máquinas (engenheiros mecânicos)

- Para o Engenheiro Civil: pontes (Fig. 1.5), viadutos, passarelas, partes resistentes das edificações (residenciais, comerciais e industriais), barragens, rodovias, ferrovias entre outras.

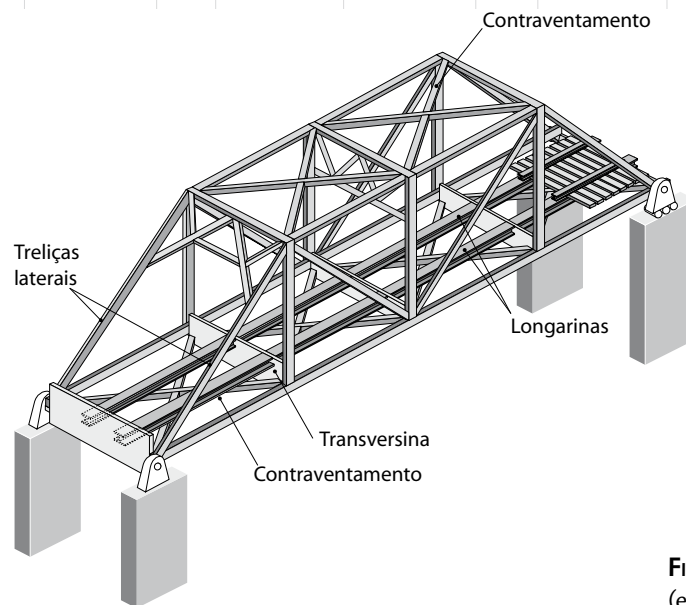


FIG. 1.5 Pontes Ferroviárias (engenheiros civis)

1.2 CONCEITO ESPECÍFICO DE ESTRUTURAS

Na Engenharia Civil, especificamente, denomina-se estrutura a parte resistente de uma construção, à qual se aplica o conceito geral apresentado anteriormente.

Em um prédio em construção pode-se claramente distinguir alguns dos elementos estruturais que compõem a parte resistente, ou estrutura, do prédio: vigas, lajes, paredes, pilares, sapatas e blocos, estes

Seja um corpo submetido a um sistema de forças externas em equilíbrio, conforme ilustrado na Fig. 3.1A. Imaginando este corpo seccionado em duas partes na seção S , como indica a Fig. 3.1B, vê-se a necessidade de introduzir um sistema de forças internas a fim de manter o equilíbrio das duas partes do corpo: à esquerda e à direita da seção S . Observar que estas forças internas variam dependendo da posição da seção S . As forças internas correspondem à interação entre as partículas do sólido que se encontram nos dois lados da seção imaginária S . Segundo o princípio da ação e reação estas forças são sempre recíprocas (iguais direções, intensidades e ponto de aplicação, mas com sentidos opostos). A parte direita do corpo age sobre a parte esquerda e vice-versa, de tal forma que as forças que aparecem em ambos os lados formam também um sistema de forças, desta vez internas, em equilíbrio, conforme ilustrado na Fig. 3.1B. Pode-se ainda afirmar que as forças internas distribuem-se na seção de tal forma que as superfícies deformadas da seção S coincidam ao se unirem as duas partes (lembrar que a seção S é imaginária e que a peça se mantém íntegra). Esta condição é denominada de condição de compatibilidade das deformações e está associada à continuidade da estrutura, peça ou elemento.

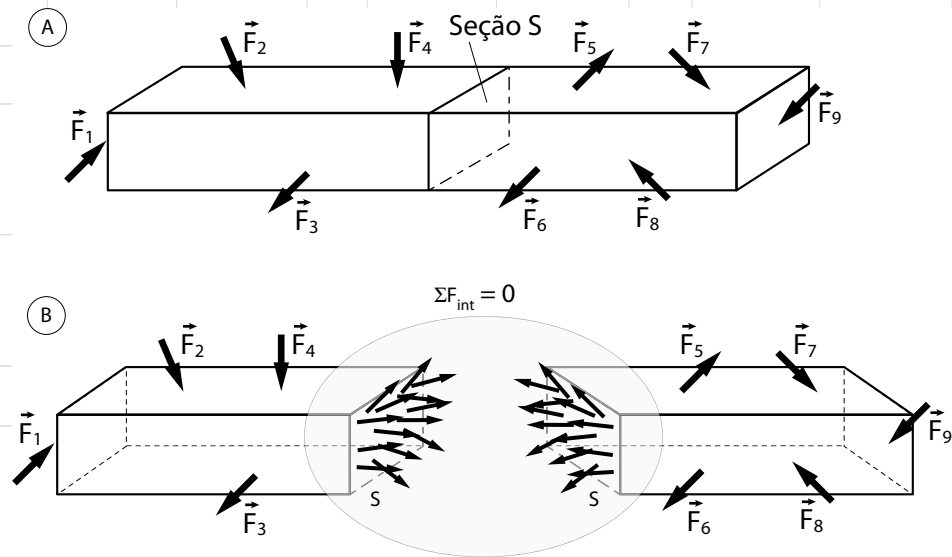


FIG. 3.1 A) Corpo submetido a um sistema de forças externas em equilíbrio; B) Tensões internas em uma seção genérica S

A distribuição das forças internas no plano da seção S se dá através das **tensões**, conforme ilustrado na Fig. 3.1B. Sendo as estruturas unidimensionais representadas somente através de seus eixos, a representação dos esforços internos deve ser feita através das resultantes das tensões referidas a estes eixos. A resultante destas tensões encontra-se representada na Fig. 3.2. Reduzindo-se ao centro de gravidade da seção obtém-se a resultante das forças e o momento resultante, representados na

Devido ao carregamento aplicado $q(x)$ pode-se afirmar que os esforços cortantes e os momentos fletores que surgem à direita e à esquerda do elemento são diferentes. Na Fig. 3.14B os cortantes (Q e $Q+dQ$) e os momentos fletores (M e $M+dM$) estão indicados nos sentidos positivos da Convenção de Sinais. Utilizando as equações de equilíbrio obtém-se:

Obs.: $Q = Q(x)$; $M = M(x)$

$$(2) \sum F_y = 0: Q - q(x)dx - (Q + dQ) = 0 \therefore q(x) = -\frac{dQ}{dx}$$

$$(3) \sum M_2 = 0: -M - Q \cdot d(x) + (q(x) \cdot dx) \cdot \frac{dx}{2} + (M + dM) = 0$$

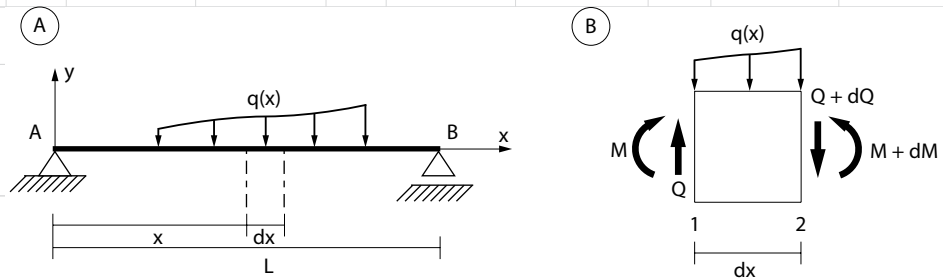


FIG. 3.14 A) Viga submetida a carregamento transversal distribuído $q(x)$; B) Equilíbrio de um elemento infinitesimal dx

Como dx é infinitesimal, o termo de ordem mais elevada $\frac{(dx)^2}{2}$ pode ser desprezado, obtendo-se então:

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

Verifica-se, portanto, que a função que expressa o carregamento transversal distribuído é igual à derivada da função que expressa o cortante com o sinal trocado, e a função do cortante é a derivada da função que expressa o momento fletor.

A variação do cortante entre os pontos 1 e 2, de abscissas x_1 e x_2 respectivamente, pode ser obtida integrando-se a função que expressa o carregamento transversal distribuído $q(x)$ ao longo do trecho definido pelos pontos:

$$Q_2 - Q_1 = -\int_{x_1}^{x_2} q(x)dx$$

que indica que a variação do cortante entre os pontos 1 e 2 é igual à área definida pela função do carregamento transversal e o eixo x , entre estes dois pontos.

A primeira destas regras é utilizada sempre. A segunda será adotada, em particular, no presente curso.

5.2 ELEMENTOS DOS PÓRTICOS PLANOS

Cada elemento ou barra que compõe as estruturas reticulares tem o seu eixo local que, assim como o elemento, é definido pelos nós inicial e final de cada um destes elementos. A análise dos ESI em cada elemento de um *pórtico plano* é feita utilizando o eixo local do elemento e a teoria de viga já estudada.

5.3 PÓRTICOS SIMPLES

O estudo dos pórticos planos será feito através da resolução de exercícios.

5.3.1 Pórtico Biapoiado

Exercício 5.1

Resolver (determinar as reações de apoio e traçar as linhas de estado) o pórtico biapoiado da Fig. 5.6.

Após a seleção de um *sistema referencial global* determinam-se as forças reativas:

- (1) $\sum F_x = 0 \therefore H_4 = 12tf$
- (2) $\sum F_y = 0 \therefore V_1 + V_4 = 30$
- (3) $\sum M_1 = 0 \therefore -12 \times 2 - 5 \times 6 \times 3 + 6V_4 = 0 \therefore V_4 = 19tf \therefore V_1 = 11tf$

Em seguida, para a obtenção dos diagramas dos esforços internos é necessário que os valores destes esforços internos (*N*, *Q* e *M* no caso dos pórticos planos) sejam determinados em todas as *seções-chave*, sempre em relação aos eixos locais da barra onde se localiza a seção. Na Fig. 5.7 encontram-se indicados os eixos locais das barras ①, ② e ③ e todas as *seções-chave* do pórtico plano em análise: 1, *A^e*, *A^d*, 2^① (seção 2 da barra ①), 2^②, 3^②, 3^③ e 4. A partir dos valores dos ESI convenien-

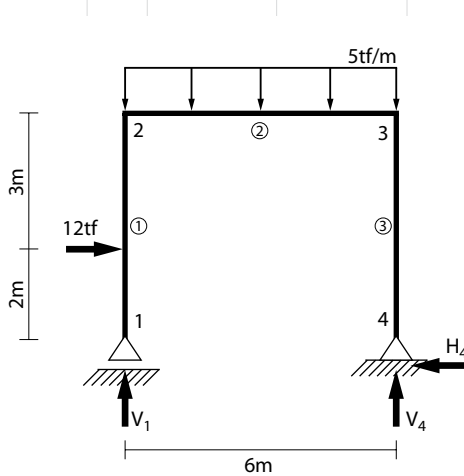


FIG. 5.6 Pórtico biapoiado

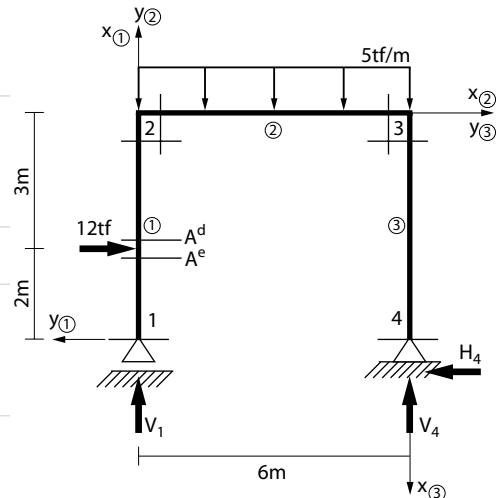


FIG. 5.7 Eixos locais e seções-chave

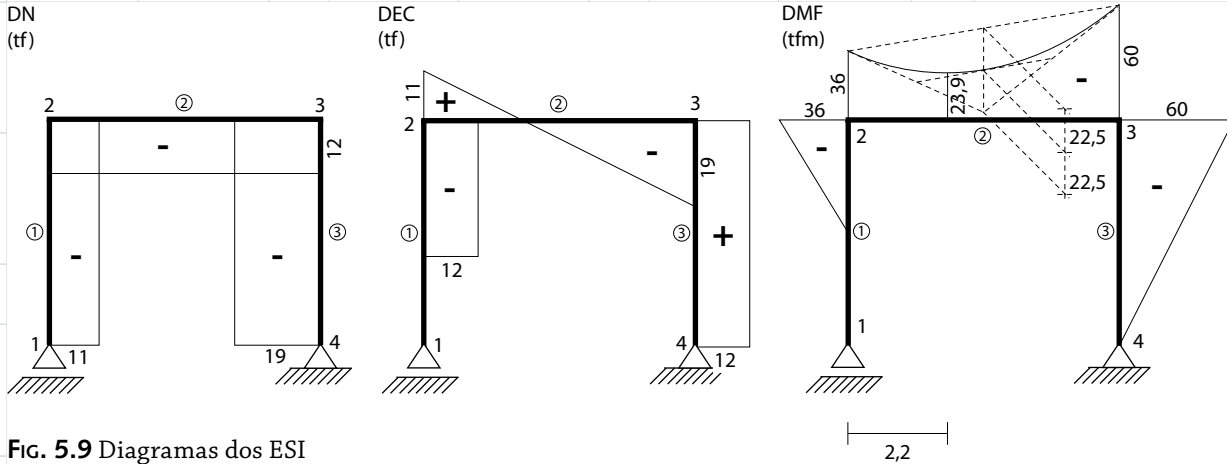


FIG. 5.9 Diagramas dos ESI

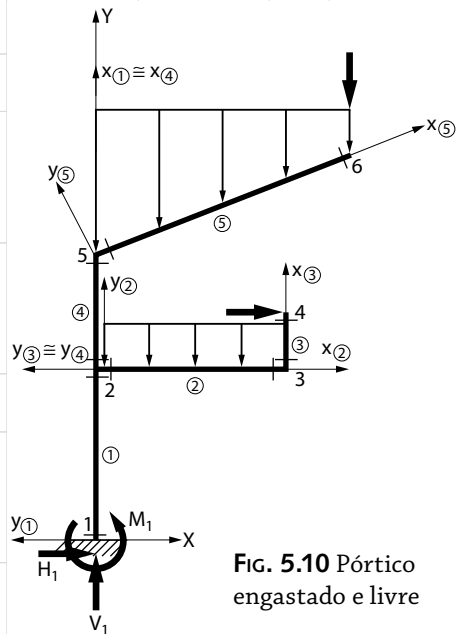


FIG. 5.10 Pórtico engastado e livre

5.3.2 Pórtico Engastado e Livre

Os quadros ou pórticos engastados e livres podem ser analisados de forma semelhante aos balanços (ou vigas engastadas e livres). O seu cálculo é bastante simples. A Fig. 5.10 exemplifica um modelo associado a uma possível estrutura de um estádio.

Para a determinação das forças reativas (prescindível para o traçado dos ESI) o eixo global selecionado tem origem no nó 1. As 3 incógnitas H_1 , V_1 e M_1 podem ser facilmente determinadas pelas 3 equações de equilíbrio.

Conforme evidenciado na Fig. 5.10, para a determinação dos ESI e o traçado dos diagramas, os eixos locais das barras têm que ser definidos e as seções-chave têm que ser identificadas: 1, 2^①, 2^②, 2^④, 3^②, 3^③, 4, 5^④, 5^⑤, 6.

No restante do texto, o superescrito representará o número da barra e não terá o círculo envolvente.

5.3.3 Pórtico Triarticulado

O pórtico ou quadro triarticulado (Fig. 5.11) é um exemplo de estrutura externamente hiperestática que se torna isostática devido à liberação de um vínculo interno, neste caso a rotação na rótula interna. A introdução desta rótula interna conduz à equação de condição:

$$M_{rot} = 0$$

As três equações do equilíbrio estático acrescidas da equação de condição permitem a determinação das reações de apoio da estrutura, uma vez que o número de incógnitas (externas) r é igual ao número de equações disponíveis:

$$r = n_e + n_c$$

onde: n_e – é o número de equações de equilíbrio

n_c – é o número de equações de condição

- Deslocamentos: $\bar{D}_x, \bar{D}_y, \bar{D}_z, \bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y$ e $\bar{\theta}_z$
- Forças: $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z, \bar{M}_x, \bar{M}_y$ e \bar{M}_z
- Esforços Internos: N, Q_y, Q_z, T, M_y e M_z
- Equações do Equilíbrio Estático:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & & \sum M_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & & \sum M_y = 0 \\ \sum F_z = 0 & & \sum M_z = 0 \end{aligned}$$

Na prática, a resolução das estruturas é feita, em geral, por meio de métodos automáticos instalados em computadores. Para a capacitação dos engenheiros ao uso destes programas de análise estrutural é fundamental um sólido conhecimento dos fundamentos teóricos envolvidos, uma perfeita compreensão de como se comportam os diversos elementos que compõem as estruturas e de como se distribuem os esforços solicitantes internos ao longo destes elementos. Esta importante e fundamental base teórica, que habilitará o engenheiro a um uso consciente e responsável dos programas de análise estrutural, é adquirida na faculdade: *só se aprende a fazer fazendo*.

Com este objetivo será resolvido o pórtico espacial indicado na Fig. 7.22 e denominado *pórtico engastado e livre*.

- Equações de Equilíbrio:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & & \sum M_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & & \sum M_y = 0 \\ \sum F_z = 0 & & \sum M_z = 0 \end{aligned}$$
- Reações de apoio (eixo global):
 $\bar{R}_{X1}, \bar{R}_{Y1}, \bar{R}_{Z1}, \bar{M}_{X1}, \bar{M}_{Y1}$ e \bar{M}_{Z1}
- Esforços nas seções (eixos locais): N, Q_y, Q_z, T, M_y e M_z

Exercício 7.4

Determinar as reações de apoio e as linhas de estado do pórtico espacial da Fig. 7.22.

- Reações de apoio: (eixo global)

$$\bar{R}_{X1} = -3 \text{ tf}; \quad \bar{R}_{Y1} = -2 \text{ tf}; \quad \bar{R}_{Z1} = 4 \text{ tf}$$

$$\bar{M}_{X1} = 20 \text{ tfm}; \quad \bar{M}_{Y1} = -16 \text{ tfm}; \quad \bar{M}_{Z1} = 5 \text{ tfm}$$

As reações de apoio encontram-se representadas na Fig. 7.22.

- Esforços internos:

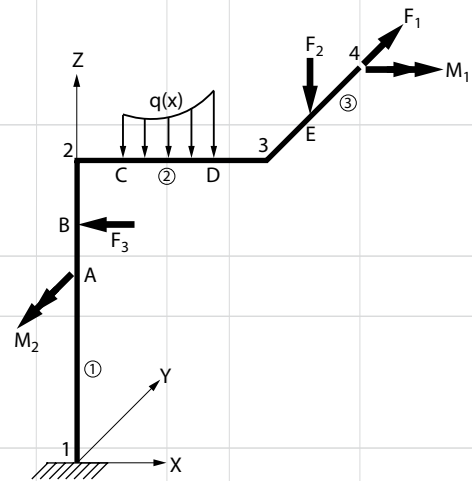


FIG. 7.21 Pórtico espacial

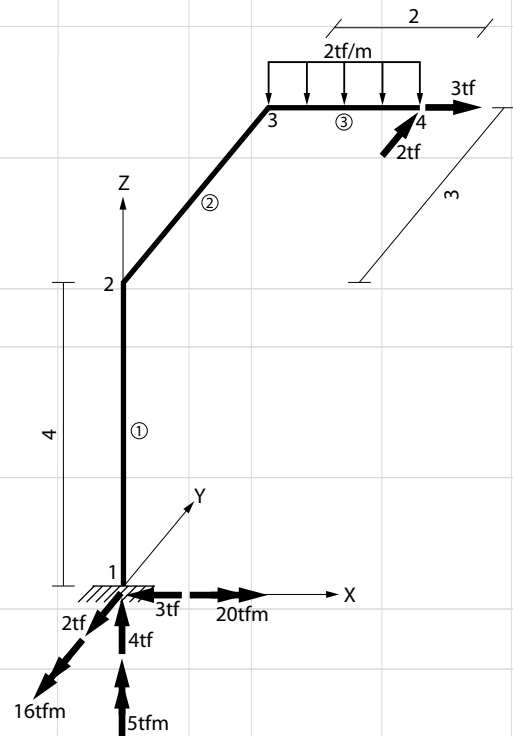


FIG. 7.22 Pórtico espacial

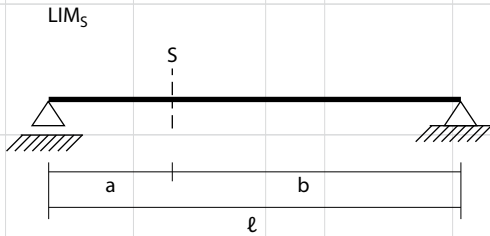
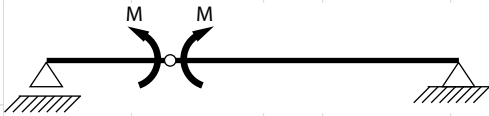
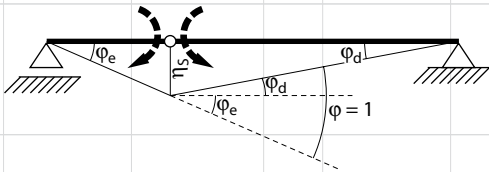


FIG. 8.21 Viga biapoiada

- Libera-se em S o vínculo associado à M , o que corresponde a introduzir uma rótula em S . Indica-se, em S , os esforços internos associados ao vínculo liberado M_s , ou simplesmente M , com os sentidos positivos (Fig. 8.22).

FIG. 8.22 Introdução de um rótula em S e sentidos positivos de M

- Aplicando-se em S um deslocamento relativo unitário associado ao vínculo liberado, ou seja, rotação $\varphi = 1$, tal que $\varphi = \varphi^e + \varphi^d$ e sendo os sentidos de φ^e e φ^d respectivamente opostos aos esforços internos correspondentes M^e e M^d , obtêm-se a deformada vertical que define $LIMs$ (Fig. 8.23).

FIG. 8.23 Sentidos de giro e deformada vertical que define a $LIMs$

- O valor de η_s pode ser obtido geometricamente :

$$(1) \varphi^e + \varphi^d = 1$$

$$(2) \eta_s = a\varphi^e = b\varphi^d \therefore \varphi^e = \frac{b}{a} \cdot \varphi^d$$

$$(2) \text{ em (1) : } \varphi^d = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{\ell} \therefore \eta_s = \frac{ab}{\ell}$$

Temos então :

FIG. 8.24 Linha de momentos fletores em S

Unidade de $LIMs \rightarrow$

Exemplos de $LIMs$: