

ÓPTICA

Jaime Frejlich

oficina de textos

© 2011 Oficina de Textos

Grafia atualizada conforme o Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa de 1990, em vigor no Brasil a partir de 2009.

CONSELHO EDITORIAL Cylon Gonçalves da Silva; José Galizia Tundisi; Luis Enrique Sánchez; Paulo Helene; Rozely Ferreira dos Santos; Teresa Gallotti Florenzano

CAPA Malu Vallim

DIAGRAMAÇÃO Casa Editorial Maluhy & Co.

PROJETO GRÁFICO Douglas da Rocha Yoshida

PREPARAÇÃO DE TEXTO Gerson Silva

REVISÃO DE TEXTO Marcel Iha

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Frejlich, Jaime

Óptica / Jaime Frejlich. – São Paulo : Oficina de Textos, 2011.

Bibliografia.

ISBN 978-85-7975-018-2

1. Física 2. Óptica (Física) I. Título.

11-04109

CDD-535

Índices para catálogo sistemático:

1. Óptica : Física 535

Todos os direitos reservados à Editora Oficina de Textos

Rua Cubatão, 959

CEP 04013-043 São Paulo SP

tel. (11) 3085 7933 fax (11) 3083 0849

www.ofitexto.com.br

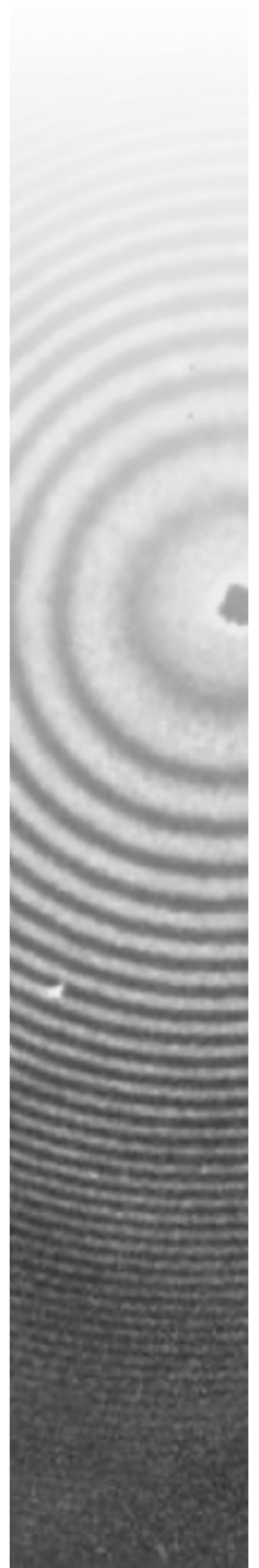
atend@ofitexto.com.br

Introdução

Este livro reúne material produzido ao longo de muitos anos de ensino de Óptica no Instituto de Física da Universidade Estadual de Campinas. O livro está dividido em duas partes: Teoria e Apêndices. A primeira parte é o texto propriamente dito; a segunda compõe-se de alguns apêndices como apoio ao texto principal, incluindo assuntos puramente teóricos, como o teorema de Bernstein, o teorema de Whittaker-Shannon, conceitos sobre funções aleatórias e outros. Incluem-se aí, também, assuntos de caráter prático, como o apêndice que trata do alinhamento de lentes, o que trata de fotodetectores etc.

A primeira parte inicia-se com um estudo sobre Óptica Geométrica na formulação matricial, o que permite abordar a maioria dos problemas de cálculo de sistemas ópticos de uma forma simples, rápida e muito didática. Os Caps. 2 e 3 tratam de assuntos clássicos, como propagação e polarização da luz. O Cap. 4 aborda questões mais complexas referentes à interferência da luz, utilizando elementos da teoria de funções aleatórias e transformações de Fourier, para oferecer uma formulação mais rigorosa das questões da coerência e do espectro de potência da luz. O tratamento da difração, no Cap. 5, é baseado principalmente na Óptica de Fourier, com um destaque específico para o processamento de imagens. O Cap. 6, referente à holografia, enfatiza a teoria da informação, além de apresentar alguns materiais fotossensíveis interessantes para o registro de imagens e hologramas em geral. O Cap. 7, sobre propagação em meios anisotrópicos e Óptica não linear, que finaliza a parte teórica, oferece apenas uma introdução sobre assuntos de grande importância, mas que estão fora do escopo deste livro, sendo geralmente objeto de cursos específicos.

Nos capítulos teóricos foram incluídos abundantes exemplos ilustrativos. No final de cada capítulo, existe uma lista de problemas, muitos deles com as soluções indicadas, bem como alguns experimentos ilustrativos da parte teórica, cujo objetivo é incentivar a realização de atividades experimentais para consolidar os assuntos tratados. Alguns desses experimentos estão muito bem detalhados e podem ser



diretamente implementados; outros estão apenas sugeridos, ficando por conta do interessado a tarefa de complementar as lacunas para viabilizar sua implementação prática. Em alguns casos, apresentam-se também resultados experimentais selecionados entre os produzidos por estudantes, para servir de exemplo e também, às vezes, para alertar sobre as dificuldades experimentais que podem surgir.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste livro, seja fazendo aportes concretos, como fotografias e resultados experimentais, os quais agradeço explicitamente no texto, seja contribuindo de maneira mais sutil, mas não menos relevante, por meio de discussões e intercâmbio de ideias sobre os mais diversos assuntos dos quais direta ou indiretamente se nutre este livro.

Agradeço também aos que são ou foram colaboradores, aos meus ex-alunos, àqueles que continuam presentes, em pessoa ou nas lembranças, e que fizeram possível este livro. A todos eles, meus mais sinceros agradecimentos.

JAIME FREJLICH

Sumário

Óptica Geométrica, 11

- 1.1 – Matrizes ópticas, 11
- 1.2 – Diafragmas em sistemas ópticos, 18
- 1.3 – Problemas, 20
- 1.4 – Experimento ilustrativo, 22

Propagação da luz, 25

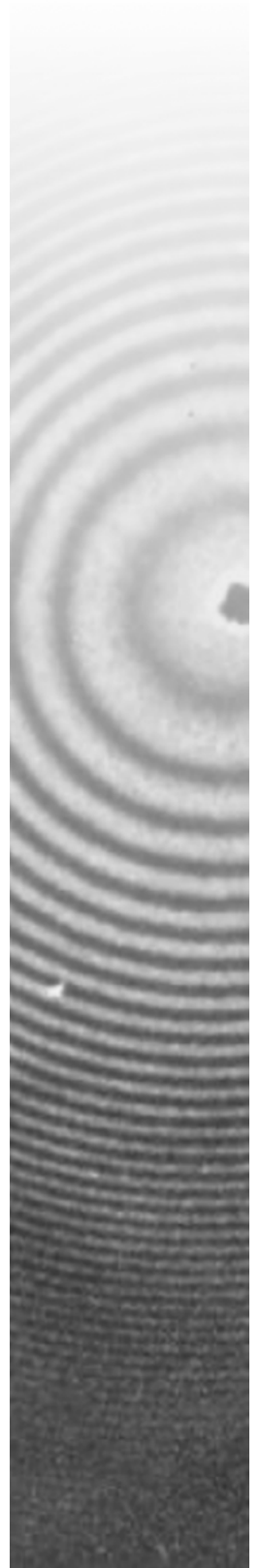
- 2.1 – Ondas harmônicas, 25
- 2.2 – Ondas eletromagnéticas, 30
- 2.3 – Efeito Doppler, 33
- 2.4 – Problemas, 34
- 2.5 – Experimento ilustrativo, 35

Natureza vetorial da luz, 37

- 3.1 – Equações de Maxwell: relações vetoriais, 37
- 3.2 – Vetor de Poynting, 37
- 3.3 – Polarização, 39
- 3.4 – Reflexão e refração, 46
- 3.5 – Problemas, 50
- 3.6 – Experimentos ilustrativos, 53

Interferência e coerência, 61

- 4.1 – Interferência, 61
- 4.2 – Coerência e espectro de potência, 67
- 4.3 – Exemplos, 74
- 4.4 – Sinal analítico e transformada de Fourier, 85
- 4.5 – Interferência e reflexões múltiplas em filmes e lâminas, 88
- 4.6 – Problemas, 90
- 4.7 – Experimentos ilustrativos, 97



Difração e Óptica de Fourier, 109

- 5.1 – Formalismo clássico, 109
- 5.2 – Teoria escalar, 116
- 5.3 – Sistemas lineares, 120
- 5.4 – Difração e teoria dos sistemas lineares, 129
- 5.5 – Teorema de Babinet: aberturas complementárias, 131
- 5.6 – Exemplos, 132
- 5.7 – Transformação de Fourier pelas lentes, 139
- 5.8 – Problemas, 148
- 5.9 – Experimentos ilustrativos, 154

Holografia e introdução à teoria da informação, 161

- 6.1 – Holografia, 161
- 6.2 – Holografia dinâmica, 168
- 6.3 – Aplicações da holografia, 171
- 6.4 – Teoria da informação, 175
- 6.5 – Experimentos ilustrativos, 182

Óptica em sólidos, 185

- 7.1 – Propagação em meios anisotrópicos, 185
- 7.2 – Exemplos, 192
- 7.3 – Óptica não linear, 194
- 7.4 – Experimento ilustrativo, 197

Apêndices: Temas teóricos e práticos complementares

Delta de Dirac, 203

- A.1 – Pente de Dirac, 204
- A.2 – Função degrau ou de Heaviside, 204

Transformada de Fourier, 205

- B.1 – Propriedades, 205
- B.2 – Funções especiais, 207
- B.3 – Relações de incerteza na transformação de Fourier, 209

Teorema de Bernstein, 211

Teorema de amostragem de Whittaker-Shannon, 213

- D.1 – Amostragem, 213
- D.2 – Recuperando a informação, 214
- D.3 – Conteúdo da informação, 214
- D.4 – Considerações, 215

Processos estocásticos, 217

- E.1 – Variável aleatória, 217
- E.2 – Processos estocásticos, 218

Alinhamento de lentes, 223

Interferômetro de Michelson, 227

G.1 – Ajuste do instrumento, 228

Fotodiodos, 233

H.1 – Regime de operação, 234

H.2 – Amplificadores operacionais, 235

Fontes de luz, 239

I.1 – Lâmpada de filamento incandescente, 239

I.2 – *Light-emitting diodes* (LEDs), 240

I.3 – Lâmpadas de descarga: Na e Hg, 240

I.4 – *Laser*, 241

Referências Bibliográficas, 243

Índice remissivo, 245

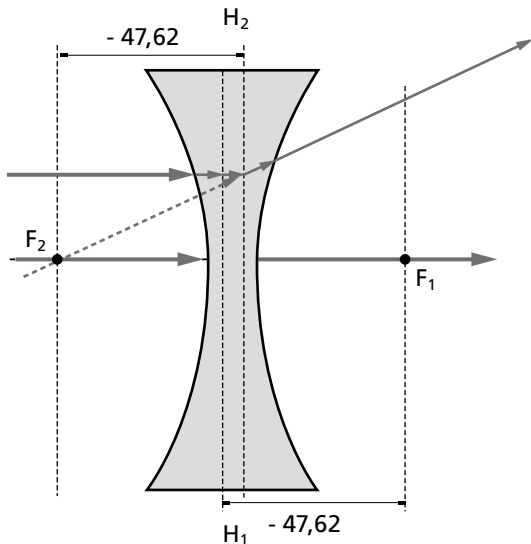


Fig. 1.18 Trajetória de raios paralelos incidindo na lente divergente, mostrando que emergem divergindo do ponto focal F_2

2. Mostre gráfica e analiticamente o percurso de raios incidindo na lente paralelamente ao eixo óptico.
 Resp.: Os raios emergem divergindo do ponto focal F_2 , como ilustrado na Fig.1.18.

1.4 EXPERIMENTO ILUSTRATIVO

1.4.1 Sistema de lentes

Trata-se de estudar experimentalmente uma lente ou sistema de lentes, para a caracterização da matriz do sistema e identificação dos planos cardinais.

Metodologia

1. Medir as características físicas (espessura no centro, raios de curvatura das superfícies etc.) de uma lente e, com essas informações, calcular os parâmetros (a , b e c) que caracterizam a matriz dessa lente. Em função deles, calcular os planos cardinais da lente.
2. Medir experimentalmente as posições dos planos cardinais e comparar esses resultados com os obtidos no item anterior. Para se medir experimentalmente os parâmetros de uma lente ou de um sistema de lentes, uma técnica recomendada é medir a amplificação de um objeto, pelo sistema, em função da distância da imagem (l'), e a inversa da amplificação em função da distância do objeto (l). É importante escolher corretamente as condições experimentais, de maneira a minimizar as incertezas experimentais: por exemplo, não medir distâncias perto do foco, pois, nessas condições, essas distâncias variam muito pouco e, conseqüentemente, os erros são grandes. A medida experimental pode ser feita por meio do gráfico β vs l' (para calcular a e c) e $1/\beta$ vs l (para calcular a e b), por regressão linear, como ilustrado nas Figs. 1.22 e 1.23.

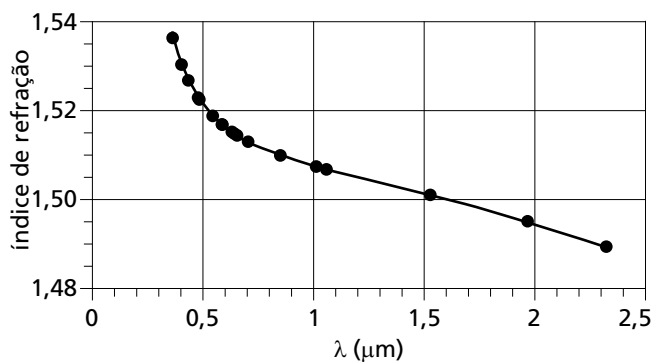


Fig. 1.19 Índice de refração - vidro BK7 Schott

3. A discrepância entre os valores medidos experimentalmente e os calculados a partir da medida sobre a lente pode decorrer de uma escolha errada do índice de refração da lente. Lembre-se de que o vidro óptico mais comum é o BK7 (ver Fig. 1.19), cujo índice varia bastante com λ . Procure recalcular os parâmetros da lente nas Eqs. (1.13-1.15), ajustando o índice de refração até obter uma melhor concordância com os resultados das regressões lineares. Trata-se também de uma forma interessante de achar o índice da lente.

- Montar duas lentes (de preferência iguais e, se possível, alguma das que já foram estudadas no item anterior) num trilho e, mantendo o sistema de lentes fixo, repetir o procedimento de medida dos planos de uma lente, agora para o conjunto das duas. Escolha o espaçamento entre as lentes de forma a facilitar a medida, ou seja, para que a imagem não fique inconvenientemente pequena nem próxima demais das lentes. Verifique se o resultado experimental corresponde ao cálculo para o sistema feito a partir das matrizes das duas lentes.
- Reposicione as duas lentes (agora sim as duas devem ser iguais) de forma que a distância entre ambas seja quatro vezes ($4f_1$) a distância focal ($f_1 = f_2$) de cada lente. Faça a imagem de um objeto (papel milimetrado transparente) colocado a uma distância $2f_1$ antes da primeira lente. Meça o “campo de observação” nessas condições. A seguir, coloque uma terceira lente, igual às anteriores, a igual distância entre as duas já existentes e verifique que o tamanho do “campo” do sistema aumentou significativamente. Quantifique esse aumento.

Exemplo

A Fig. 1.20 mostra uma objetiva fotográfica medida no experimento descrito anteriormente. Os gráficos nas Figs. 1.22 e 1.23 mostram as curvas de β vs distância imagem (L') e $1/\beta$ vs distância objeto (L), ambas as distâncias medidas desde os vértices das lentes de saída e de entrada, respectivamente. As posições dos planos principais de entrada e de saída (indicados na Fig. 1.21) calculadas desses gráficos são:

$$LH = -8,54 \text{ mm} \quad LH' = -30,12 \text{ mm} \quad (1.51)$$



Fig. 1.20 Objetiva fotográfica estudada por Tatiane O. dos Santos

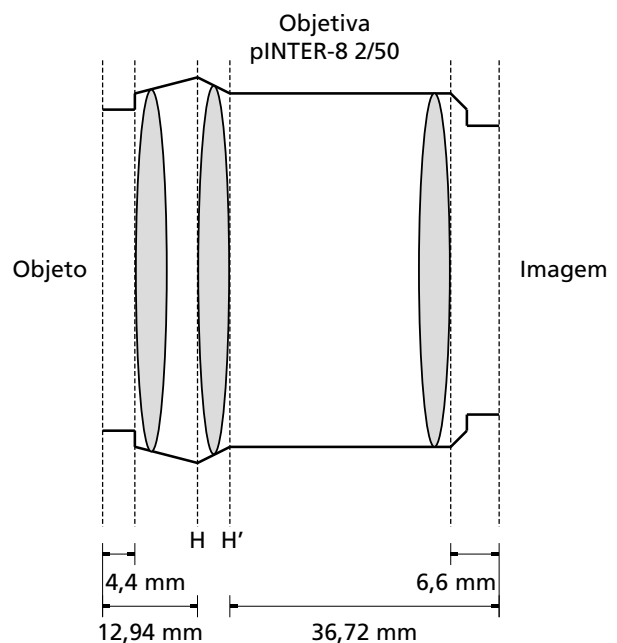


Fig. 1.21 Esquema da objetiva da Fig. 1.20, mostrando o possível arranjo do sistema de lentes e a posição dos planos principais e vértices das lentes

3.4 REFLEXÃO E REFRAÇÃO

A reflexão e a refração de uma onda plana numa interfase, como indicado na Fig. 3.6, apresentam continuidade da fase, o que significa que, nas coordenadas \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , na interfase teremos, para as ondas incidente, refletida e transmitida, respectivamente:

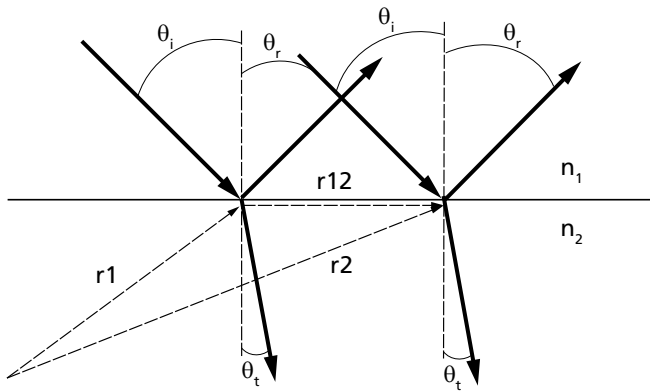


Fig. 3.6 Reflexão e refração de ondas planas

$$\begin{aligned} \phi_i(\vec{r}_1) &= \vec{r}_1 \cdot \vec{k}_i - \omega t_1 & \phi_i(\vec{r}_2) &= \vec{r}_2 \cdot \vec{k}_i - \omega t_2 \\ \phi_r &= \vec{r}_1 \cdot \vec{k}_r - \omega t_1 & \phi_r(\vec{r}_2) &= \vec{r}_2 \cdot \vec{k}_r - \omega t_2 \\ \phi_t &= \vec{r}_1 \cdot \vec{k}_t - \omega t_1 & \phi_t(\vec{r}_2) &= \vec{r}_2 \cdot \vec{k}_t - \omega t_2 \\ \phi_i(\vec{r}_1) &= \phi_r(\vec{r}_1) = \phi_t(\vec{r}_1) & \phi_i(\vec{r}_2) &= \phi_r(\vec{r}_2) = \phi_t(\vec{r}_2) \end{aligned}$$

Subtraindo as expressões para os pontos \vec{r}_2 e \vec{r}_1 , resulta:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r}_{12} = \vec{k}_r \cdot \vec{r}_{12} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}_{12} \quad \vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Sabendo que:

$$k_i = k_0 n_1 \quad k_r = k_0 n_1 \quad k_t = k_0 n_2$$

concluimos que:

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \quad n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (3.43)$$

que resume as leis de reflexão e de refração (Snell).

3.4.1 Equações de Fresnel

A Fig. 3.7 mostra o vetor do campo elétrico e o vetor intensidade do campo magnético das ondas incidente, refletida e refratada. Pelo teorema da continuidade das componentes paralelas numa interfase (Slater; Frank, 1947), para os campos \vec{E} e \vec{H} , tem-se:

$$E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r = E_t \cos \theta_t$$

$$H_i + H_r = H_t$$

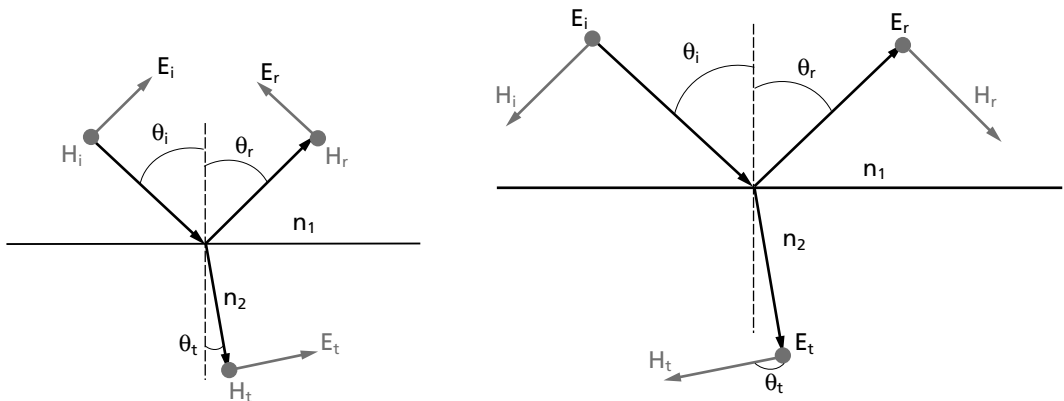


Fig. 3.7 Reflexão de Fresnel para configuração TM (esquerda) e TE (direita)

Porém, como num meio não condutor se verifica $E/H = \sqrt{\mu/\epsilon}$, então:

$$\begin{aligned} E_i \cos \theta_i - E_r \cos \theta_r &= E_t \cos \theta_t \\ (E_i + E_r) \sqrt{\epsilon_1/\mu_1} &= E_t \sqrt{\epsilon_2/\mu_2} \end{aligned}$$

Uma vez que os índices de refração podem ser escritos como:

$$n_1 = c\sqrt{\mu_1\epsilon_1} \quad n_2 = c\sqrt{\mu_2\epsilon_2} \text{ com } n \equiv n_2/n_1$$

o que, junto com as equações para os campos elétricos incidente, refletido e transmitido, resulta numa expressão para a refletância complexa para a polarização TM:

$$r_{\text{TM}} \equiv E_r/E_i = \frac{n \cos \theta_i - \cos \theta_t}{n \cos \theta_i + \cos \theta_t} \quad (3.44)$$

e similarmente para a polarização TE:

$$r_{\text{TE}} = \frac{\cos \theta_i - n \cos \theta_t}{\cos \theta_i + n \cos \theta_t} \quad (3.45)$$

Pela lei de Snell, as duas formulações anteriores também podem ser escritas assim:

$$r_{\text{TE}} = -\frac{\text{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)} \quad (3.46)$$

$$r_{\text{TM}} = \frac{\text{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\text{tg}(\theta_i + \theta_t)} \quad (3.47)$$

A refletância para ambas as polarizações ($|r_{\text{TE}}(\theta_i)|^2$ e $|r_{\text{TM}}(\theta_i)|^2$) aparece nas Figs. 3.8 e 3.9 para os casos de reflexão externa ($n = 1,5$) e interna ($n = 1/1,5$), respectivamente. Em ambos os casos, fica claro que, para polarização TM, existe um ângulo de incidência (chamado de Brewster) para o qual a reflexão é nula, o que não é o caso para a polarização TE. Na Fig. 3.9, vemos o fenômeno de reflexão total que ocorre para:

$$n_i \text{sen} \theta_i \geq n_t \quad \text{sen} \theta_i \geq n \equiv n_t/n_i \quad (3.48)$$

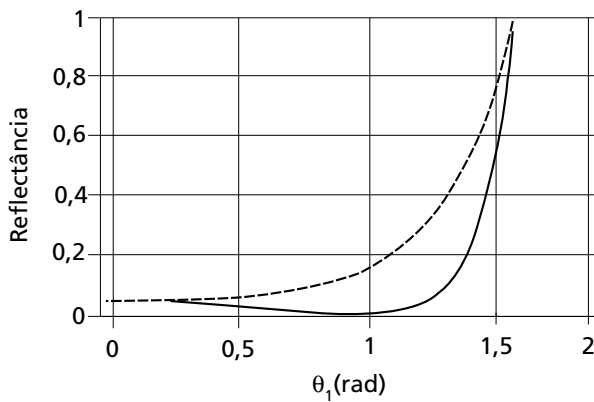


Fig. 3.8 Refletância numa interface com índice de refração relativo $n=1,5$, para polarização TE (tracejado) e TM (contínuo)

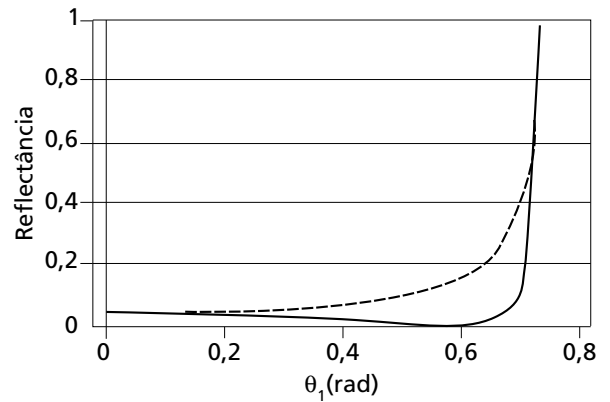


Fig. 3.9 Refletância numa interface com índice de refração relativo $n=1/1,5$, para polarização TE (tracejado) e TM (contínuo)

Pelo teorema de Parseval (Eq. B.8), esse fluxo de energia pode ser também calculado pela sua TF:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |TF\{f(t)\}|^2 d\nu = \left[A^2 \frac{(2a^2 + ia\omega_0 + \omega_0^2) \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\nu}{a-i\omega_0}\right) + (2a^2 - ia\omega_0 + \omega_0^2) \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\nu}{a+i\omega_0}\right)}{8a\pi(a^2 + \omega_0^2)} \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ = \frac{A^2}{4a} \frac{2a^2 + \omega_0^2}{a^2 + \omega_0^2} \quad (4.64)$$

que é a mesma expressão mostrada na Eq. (4.63).

Exemplo: Luz de lâmpada incandescente

Na Fig. 4.20, podemos ver uma representação gráfica da parte real de $\Gamma(\tau)$ para um pulso amortecido arbitrário, como o descrito na Eq. (4.57), com os valores arbitrários $a = 0,5 \text{ s}^{-1}$, $\omega_0 = 5 \text{ rad}$ e $\tau_0 = 0$.

A Fig. 4.21 mostra a visibilidade de uma fonte de luz branca, como a descrita na Fig. I.1 (Apêndice), experimentalmente medida num interferômetro de Michelson, e seu melhor ajuste com diferentes curvas:

1. Exponencial:

$$A e^{-a|\tau - \tau_0|} \quad (4.65)$$

2. Gaussiana:

$$A e^{-(\tau - \tau_0)^2/a^2} \quad (4.66)$$

3. Lorentziana:

$$A \frac{a^+ \tau^2}{(a^2 + \tau_0^2 - \tau^2)^2 + 4a^2 \tau^2} \quad (4.67)$$

sendo que o melhor ajuste ocorre usando a exponencial que representa a envolvente das Eqs. (4.61) e (4.62), ou seja, que a luz emitida pela lâmpada incandescente está adequadamente representada pelo modelo de um pulso amortecido, representado na Eq. (4.57). Cada um dos pontos (o) no gráfico da Fig. 4.21 corresponde a meia interfranja, ou seja, a $\lambda/2$. Sabendo que o pico do espectro (medido com um fotodetector de silício) de nossa fonte de luz, representada na Fig. I.1 (Apêndice), está em $\lambda_p \approx 650 \text{ nm}$, podemos concluir que o espaçamento entre pontos na Fig. 4.21, que representa 1 au, corresponde a:

$$1 \text{ au} \approx \frac{\lambda_p}{2 \times c} = \frac{650 \times 10^{-9}}{2 \times 3 \times 10^8} = 1,083 \times 10^{-15} \text{ s} \quad (4.68)$$

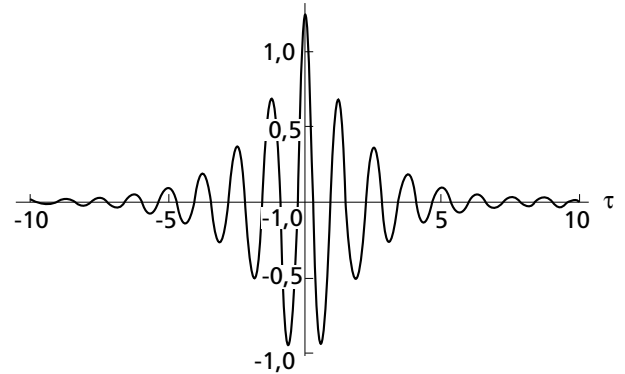


Fig. 4.20 $\Re\{\Gamma(\tau)\} = \Gamma(\tau)$ para um pulso amortecido da forma $\propto e^{-0.5 t} \cos(5 t)$ em unidades arbitrárias

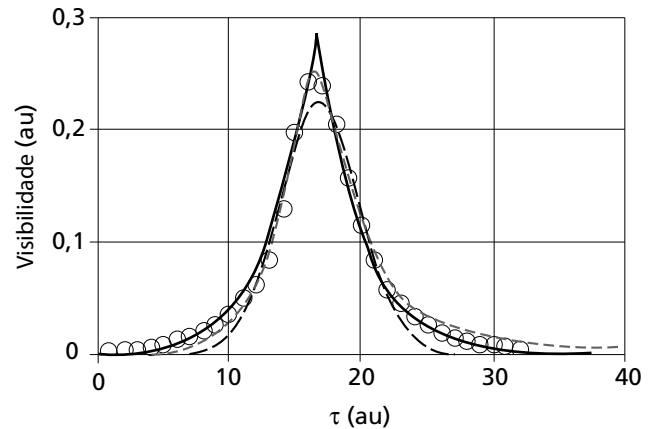


Fig. 4.21 Visibilidade relativa (o) da luz de uma lâmpada incandescente medida num interferômetro de Michelson: A curva grossa contínua representa uma exponencial (Eq. (4.65), com $A = 290$, $a = 0,294$ e $\tau_0 = 16,6$), a curva preta com tracejado grande representa uma gaussiana (Eq. (4.66) com $A = 226$, $\tau_0 = 16,8$ e $a = 4,34$) e a curva cinza com tracejado pequeno representa uma lorentziana (Eq. (4.67) com $A = 7808$, $a = 2,82$ e $\tau_0 = 16,3$)

Por outro lado, com os parâmetros indicados na Fig. 4.21 para a curva exponencial, podemos calcular a largura de $|\gamma(\tau)|$:

$$\Delta\tau = \frac{1}{|\gamma(0)|} \int_0^{+\infty} |\gamma(\tau)| d\tau = 6,78 \text{ ua} \quad (4.69)$$

e com o resultado na Eq. 4.68 para 1 au, podemos calcular:

$$\Delta\tau \approx 6,78 \text{ au} \times 1,083 \times 10^{-15} \text{ s} \approx 7,3 \times 10^{-15} \text{ s} \quad (4.70)$$

Pela relação de incerteza da TF descrita na seção B.3 (Apêndice), podemos concluir que a largura espectral para essa luz é:

$$\Delta\nu \geq 1,37 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad (4.71)$$

$$|\Delta\lambda| = \lambda^2 \Delta\nu / c \geq 193 \text{ nm} \quad (4.72)$$

4.3.4 Espectroscopia por transformação de Fourier

O espectro de potência normalmente se mede por meio de espectrômetros, que utilizam uma rede de difração para separar, em faixas espectrais, a potência da radiação luminosa sob análise. Assim, determina-se o quanto da potência corresponde a cada faixa espectral. A resolução do aparelho depende fundamentalmente do poder separador da rede.

O espectro pode ser também calculado a partir da medida de $\Re\{\Gamma(\tau)\}$ feita num interferômetro de Michelson, pela relação de transformação de Fourier que existe entre $S(\nu)$ e $\Gamma(\tau)$. Assim, podemos calcular $\Gamma(\tau)$ a partir do interferograma no interferômetro e então (via transformação de Fourier), o $S(\nu)$. Por causa da “relação de incerteza” (ver seção B.3 - Apêndice) que existe entre as funções $S(\nu)$ e $\Gamma(\tau)$, a resolução espectral calculada da relação $S(\nu) = \text{TF}\{\Gamma(\tau)\}$ é determinada pela largura de $\Gamma(\tau)$, razão pela qual será melhor quanto maior for a varredura do espelho no interferômetro de Michelson utilizado. De fato, se estamos lidando com uma luz cuja largura espectral é $\Delta\nu$, a envolvente do interferograma (ou seja, a envolvente de $\Re\{\Gamma(\tau)\}$) terá que ter uma largura $\Delta\tau \geq 1/\Delta\nu$. Isso representa um deslocamento espacial do espelho que permita uma variação de caminho óptico maior que:

$$c\Delta\tau \geq c/\Delta\nu \quad (4.73)$$

Se o espelho do interferômetro não permite deslocamentos dessa amplitude, não poderemos medir corretamente a largura do interferograma nem calcular $\Delta\nu$. Quanto mais fina for a linha espectral ($\Delta\nu$), maior terá que ser a distância $c\Delta\tau$ definida na Eq. (4.73).

Exercício

1. Em função das relações nas Eqs. (4.17) e (4.18), pode-se calcular o espectro de uma radiação luminosa a partir da $\Gamma(\tau)$ obtida com um interferômetro de Michelson. Qual deverá ser a varredura mínima do espelho de um interferômetro de Michelson para que ele possa permitir o cálculo de $S(\nu)$ com uma precisão de $0,1\text{\AA}$, para $\lambda \approx 500 \text{ nm}$?

Resp.: Maior que 25 mm.

5.1.1 Princípio de Huygens-Fresnel

Huygens formulou uma teoria para a propagação da luz sob a perspectiva ondulatória. A formulação, chamada de Huygens-Fresnel, está esquematicamente

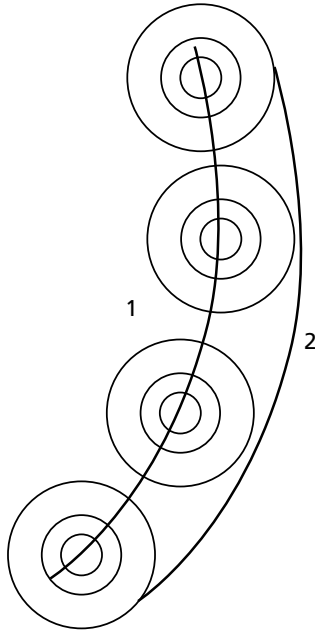


Fig. 5.1 Teoria de Huygens para a propagação da luz

ilustrada na Fig. 5.1. Mais detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em (Born; Wolf, 1975). O ponto fundamental é que a propagação da luz é vista como um conjunto de ondas esféricas secundárias sendo geradas em cada ponto da frente de onda primária, e isso pode ser aplicado ao estudo da difração.

Segundo Huygens, cada ponto de uma frente de onda pode ser considerado, por sua vez, como um centro gerador de uma onda esférica (secundária) centrada nele. A frente de onda principal num tempo posterior está determinada pela envolvente, num dado instante, de todas essas ondas secundárias. As amplitudes e fases dessas ondas secundárias teriam que ter determinadas propriedades matemáticas para descrever corretamente o fenômeno e fazer com que, por exemplo, a onda se propague para frente, e não para trás.

5.1.2 Difração por uma fenda

Antes de nos aprofundarmos num formalismo matemático mais complexo, vamos estudar a difração com a abordagem ondulatória mais simples.

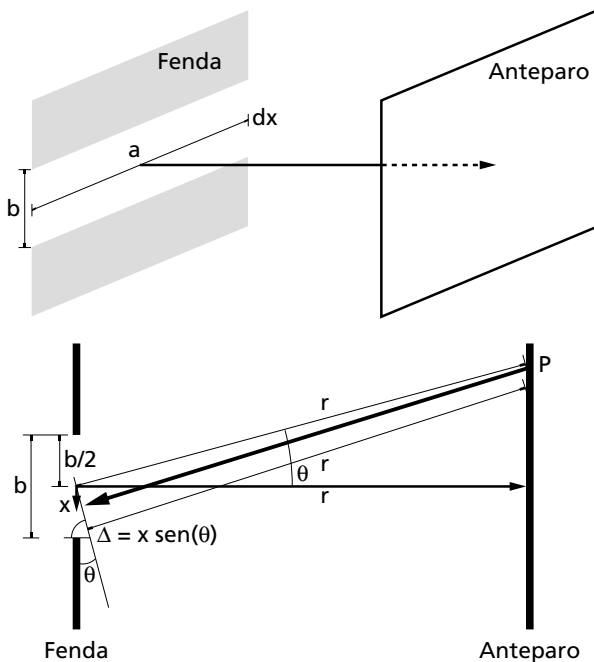


Fig. 5.2 Difração por uma fenda de largura b e comprimento $a \gg b$, observado num anteparo a uma distância muito grande

Vamos supor uma onda luminosa plana de amplitude E_0 incidindo perpendicularmente no plano da fenda, como ilustrado na Fig. 5.2. Queremos calcular a amplitude da luz que chega ao ponto P no anteparo, formada pelas ondas secundárias vindas da fenda, o que representa a difração da luz pela fenda. Para tanto, vamos decompor a fenda em pequenos segmentos de comprimento a (o comprimento da fenda) e de largura dx , suficientemente pequena para poder supor que a amplitude é uniforme em cada segmento. Calculamos a contribuição de cada um desses elementos da fenda, sobre o ponto P , e somamos todos.

Calculemos primeiro a amplitude dE_x que chega ao ponto P no anteparo, vinda do segmento adx na posição x , medida a partir do centro da fenda:

$$dE_x = \frac{E_0 a dx}{ab r} \text{sen}(kr - \omega t + k\Delta) \quad (5.1)$$

$$\text{onde } \Delta \equiv x \text{ sen } \theta \text{ e } k \equiv 2\pi/\lambda \quad (5.2)$$

$$\text{para } r \gg b \quad (5.3)$$

onde Δ é a diferença de caminho em relação ao centro da fenda. A expressão simétrica à mesma distância x , mas para cima, é:

$$dE_{x^-} = \frac{E_0 dx}{b r} \text{sen}(kr - \omega t - k\Delta) \quad (5.4)$$

e a soma dos dois fica assim:

$$dE = dE_x + dE_{x^-} = \frac{E_0 dx}{b r} 2 \text{sen}(kr - \omega t) \cos(k\Delta) \quad (5.5)$$

$$\text{porque } \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (5.6)$$

Para calcular a contribuição da fenda toda, sobre o ponto P, integramos de 0 até $b/2$:

$$E = \int_{x=0}^{x=b/2} dE = \frac{2E_0}{b r} \text{sen}(kr - \omega t) \int_0^{b/2} \cos(kx \text{sen } \theta) dx \quad (5.7)$$

$$= \frac{2E_0}{b r} \text{sen}(kr - \omega t) \left[\frac{\text{sen}(kx \text{sen } \theta)}{k \text{sen } \theta} \right]_0^{b/2} = \frac{2E_0}{b r} \text{sen}(kr - \omega t) \frac{\text{sen}(k(b/2) \text{sen } \theta)}{k \text{sen } \theta} \quad (5.8)$$

$$E = \frac{E_0}{r} \text{sen}(kr - \omega t) \frac{\text{sen}(k(b/2) \text{sen } \theta)}{k(b/2) \text{sen } \theta} \quad (5.9)$$

Para calcularmos a intensidade correspondente a essa amplitude, devemos calcular a média temporal do módulo quadrado dessa amplitude (ver seção 3.2) da seguinte forma:

$$I(\theta) = \langle |E|^2 \rangle = \left(\frac{E_0}{r} \right)^2 \left(\frac{\text{sen}(k(b/2) \text{sen } \theta)}{k(b/2) \text{sen } \theta} \right)^2 \langle \text{sen}^2(kr - \omega t) \rangle \quad (5.10)$$

sabendo que $\langle \text{sen}^2(kr - \omega t) \rangle = 1/2$ concluímos que

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\text{sen}(k(b/2) \text{sen } \theta)}{k(b/2) \text{sen } \theta} \right)^2 \quad I(0) = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{r^2} \quad (5.11)$$

Podemos escrever esse resultado de forma simplificada, chamando $\Phi \equiv kb \text{sen } \theta$, que representa a diferença de fase dos dois raios saindo dos extremos da fenda, e substituindo na Eq. (5.11):

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\text{sen } \Phi/2}{\Phi/2} \right)^2 \quad (5.12)$$

$$\text{lembrando que } \lim_{\Phi \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Phi/2}{\Phi/2} = 1 \quad (5.13)$$

5.1.3 Fenda dupla

Para o caso das duas fendas ilustradas na Fig. 5.3, o procedimento é similar, exceto que x é medida a partir do centro de simetria das duas fendas e a integração deve estar de acordo com esse novo esquema. Partindo da Eq. (5.7), correspondentemente modificada: