EDSON DENNER LEONEL

ASPECTOS TEÓRICOS DA MECÂNICA DA FRATURA



Blucher

Edson Denner Leonel

Aspectos teóricos da mecânica da fratura

Aspectos teóricos da mecânica da fratura
© 2026 Autores
Editora Edgard Blücher Ltda.

Publisher Edgard Blücher
Editor Eduardo Blücher
Coordenação editorial Rafael Fulanetti
Coordenação de produção Ana Cristina Garcia
Produção editorial Marcel Iha
Revisão de texto MPMB
Diagramação Malu Vallim
Capa Juliana Midori Horie

Blucher

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar
04531-934 – São Paulo – SP – Brasil
Tel.: 55 11 3078-5366
contato@blucher.com.br
www.blucher.com.br

Segundo o Novo Acordo Ortográfico, conforme 6. ed.
do *Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa*,
Academia Brasileira de Letras, julho de 2021.

É proibida a reprodução total ou parcial por quaisquer
meios sem autorização escrita da editora.

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard Blücher Ltda.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Heytor Diniz Teixeira, CRB-8/10570

Leonel, Edson Denner
Aspectos teóricos da mecânica da fratura / Edson Denner Leonel.
– São Paulo : Blucher, 2026.

426 p. : il.

Bibliografia
ISBN 978-85-212-2933-9 (Impresso)
ISBN 978-85-212-2937-7 (Eletrônico – Epub)
ISBN 978-85-212-3065-6 (Eletrônico – PDF)

1. Mecânica das estruturas. 2. Fratura elástico linear.
3. Engenharia de estruturas. 4. Mecânica da fratura. 5. Mecânica
dos sólidos deformáveis. 6. Fadiga. 7. Mecânica do dano. 8. Fratura
anisotrópica. 9. Propagação de fissuras. 10. Fratura não linear.
I. Título.

CDU 624.01

Índice para catálogo sistemático:
1. Teoria do direito CDU 34.01

Sumário

Prefácio 11

CAPÍTULO 1

Domínios elásticos e inelásticos 13

CAPÍTULO 2

Tópicos elementares da teoria da plasticidade. Elastoplasticidade unidimensional 47

CAPÍTULO 3

Tópicos elementares da mecânica do dano 69

CAPÍTULO 4

A mecânica da fratura 99

CAPÍTULO 5

Funções complexas de tensão 111

CAPÍTULO 6

Termodinâmica do processo de propagação da fissura 149

CAPÍTULO 7

Mecânica da fratura aplicada a materiais dúcteis 197

CAPÍTULO 8

Mecânica da fratura aplicada ao concreto 239

CAPÍTULO 9

Mecânica da fratura aplicada à madeira 285

CAPÍTULO 10

A fadiga dos materiais 313

Anexo A 343
Anexo B 365
Anexo C 373
Anexo D 381
Anexo E 385
Anexo F 391
Anexo G 403

Referências 407

Prefácio

A busca pela compreensão de como, por que e quando os materiais falham é um dos pilares mais desafiadores e fascinantes da engenharia e da ciência dos materiais. Longe de ser um evento súbito e isolado, a falha mecânico-material é o culminar de processos complexos que ocorrem em diferentes escalas e sob as mais diversas condições de solicitação. Esta obra nasce do propósito de mapear esses processos, oferecendo um guia sólido, coeso e didático para desvendar tais fenômenos.

O livro foi estruturado para apresentar teorias que descrevem, de forma consistente e rigorosa, os caminhos que levam um componente estrutural ao colapso. Para isso, o texto divide-se harmonicamente em dois grandes campos:

A abordagem do contínuo: onde os critérios de falha, a elastoplasticidade e a mecânica do dano assumem a continuidade material para prever a degradação e a falha em macroescala.

A abordagem discreta: onde a mecânica da fratura cumpre o papel essencial de incorporar e tratar as descontinuidades materiais (como trincas e fissuras) de forma discreta.

Ao longo das páginas, o leitor encontrará formulações capazes de descrever tanto materiais isótropos como anisótropos, adaptando-se a cenários que en-

volvem desde pequenas frações de plastificação até extensas zonas de processos inelásticos.

Este livro não é apenas fruto de uma compilação teórica; ele é o resultado de uma jornada de dedicação contínua. As reflexões, métodos e abordagens aqui reunidos consolidam os esforços envidados pelo autor desde 2004, quando ele foi desafiado a calcular o estado de tensão na extremidade de uma trinca. Foram mais de duas décadas de pesquisa, docência e refinamento, que agora se traduzem em um texto linear e acessível.

O conteúdo desta obra foi cuidadosamente pensado para estudantes, engenheiros e pesquisadores que estão fazendo o seu primeiro contato com as teorias de previsão e descrição da falha.

Este livro visa fornecer o instrumental analítico e o pensamento crítico necessários para que a próxima geração de pesquisadores possa não apenas prever a falha, mas também inovar na criação de estruturas mais seguras, sustentáveis e eficientes.

Tenha uma excelente e transformadora leitura.

Edson Denner Leonel

CAPÍTULO 1
Domínios elásticos e inelásticos

1.1 APRESENTAÇÃO

Desde a Antiguidade, o ser humano envida esforços na busca por respostas e soluções consistentes para os problemas presentes em seu cotidiano. Muitas das respostas e soluções dão origem a demandas por produtos, manufaturas e serviços, os quais possibilitam maior conforto, comodidade e maior eficiência nos triunfos sobre os desafios do cotidiano. Tais demandas são desafiadoras para pesquisadores e engenheiros, pois tornam-se cada vez mais complexas à medida que a sociedade evolui. No contexto da Engenharia de Estruturas, por exemplo, engenheiros e pesquisadores devem propor novas abordagens e estratégias e aprimorar teorias existentes para a representação do comportamento mecânico dos materiais que compõem a estrutura de produtos e manufaturas, uma vez que as crescentes demandas impulsionam o desenvolvimento de novos materiais e de sistemas estruturais alternativos. Tais tarefas usualmente requerem também o aprimoramento de estratégias e técnicas numéricas, que possibilitam soluções aproximadas incorporando as descrições fenomenológicas teóricas.

A descrição realista e precisa do comportamento mecânico-material é de extrema importância nos projetos de Engenharia de Estruturas. Além de predizer a evolução das deformações no sistema estrutural em função da variação da intensidade dos carregamentos externos atuantes, o que possibilita a avaliação do comportamento estrutural, essa descrição permite a caracterização de valores limites para os carregamentos atuantes. Portanto, a avaliação do comportamento estrutural envolve também a descrição dos processos de falha material, que conduzem à previsão sobre eventuais cenários de falha e configurações de colapso. Enfatiza-se que a predição da falha é imprescindível para a adequada escolha de materiais e da geometria/arranjo dos elementos estruturais. Isso é particularmente importante em estruturas estaticamente indeterminadas, onde a configuração de colapso depende da rigidez das vinculações e dos elementos estruturais envolvidos. Destaca-se que as consequências de falhas estruturais podem ser enormes, tanto do ponto de vista financeiro e de perdas de vidas humanas como do ponto de vista social e ambiental. Portanto, essas falhas devem ser adequadamente previstas, quantificadas e evitadas por engenheiros e pesquisadores.

O texto a seguir apresenta aspectos introdutórios relacionados às teorias que descrevem os processos de falha material. Devido ao caráter extenso do tema, o objetivo não é exaurir a discussão sobre nenhuma dessas teorias, mas sim fornecer uma visão geral sobre as abordagens atualmente utilizadas, o que possibilitará ao leitor, no futuro, o aprofundamento autônomo sobre os temas de seu interesse.

1.2 LIMIARES ENTRE REGIMES ELÁSTICO E INELÁSTICO. CRITÉRIOS DE FALHA

1.2.1 Generalidades

Engenheiros e pesquisadores têm o primeiro contato com a representação da falha mecânico-material ainda nos cursos de graduação. Particularmente nas disciplinas Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais, o colapso mecânico-material vem sendo caracterizado por meio de critérios de falha. Nesse contexto, é necessário especificar os materiais para a composição de uma estrutura ou de um sistema estrutural, os quais devem suportar a intensidade das tensões mobilizadas pelos carregamentos externos atuantes, ou seja, suportar a intensidade da interação mecânica entre os microcomponentes do material. Como cada material possui uma capacidade própria/parti-

cular de resistir elasticamente a um dado nível de tensão, torna-se necessária a definição de um limite superior para a intensidade das componentes que caracterizam o estado de tensão no material, de forma a definir, configurar e prevenir a falha do material. Como em projetos de Engenharia de Estruturas usualmente assume-se que o material obedeça ao regime linear, considera-se que a falha seja caracterizada simplesmente pela observação de um regime inelástico em qualquer ponto material. Portanto, dada a simplicidade da definição da falha nesse contexto, justifica-se a utilização de critérios de falha clássicos.

A caracterização de regimes inelásticos é prontamente efetuada em problemas uniaxiais, como em uma barra simples tracionada ou comprimida, por exemplo, onde é possível definir o tensor de tensões com apenas uma única componente de tensão normal não nula. Porém, a avaliação sobre a existência de regimes inelásticos no material torna-se mais complexa quando estão envolvidos estados bi e triaxiais de tensões. Para ilustrar a complexidade nesses problemas, devem ser considerados os elementos estruturais formados pelo mesmo material apresentados na Figura 1.1, submetidos a solicitações que introduzem estados de tensão diferentes. A questão que pode ser colocada é a seguinte: qual elemento irá falhar primeiro?

Analisando as ilustrações apresentadas na Figura 1.1, observa-se intuitivamente que na estrutura onde atua a força confinante F o colapso irá ocorrer sob carregamentos P mais elevados se comparado à estrutura onde F não atua. Esse aumento aparente na capacidade resistente da estrutura/material deve-se ao confinamento gerado pela força F, o qual está intrinsicamente associado à introdução de componentes de tensão orientadas na direção do plano da seção transversal da estrutura. Por esse motivo, em esportes como o levantamento de peso, por exemplo, o atleta utiliza um cinto e proteções nos joelhos e cotovelos para não prejudicar suas articulações. Similarmente, reforços estruturais podem ser concebidos. Dessa forma, pilares e vigas podem ser revestidos ("encamisados") com fibra de carbono objetivando gerar o confinamento e aumentar a capacidade resistente da estrutura.

Os materiais de uso corrente em engenharia podem ser, simplificadamente, classificados em dois grandes grupos. O primeiro deles, denominado frágil, abrange os materiais que falham sob níveis de deformação consideravelmente pequenos. Além disso, nestes materiais, a falha ocorre preponderantemente por fratura. O outro grupo, que envolve materiais com deforma-

ções no instante da falha significativamente maiores que nos materiais frágeis, é denominado dúctil. Nos materiais dúcteis, a falha ocorre preponderantemente por escoamento do material com observação de encruamento (*hardening*) ou amolecimento (*softening*) no trecho inelástico. Existem também alguns materiais, como concreto, cerâmicas, compósitos e outros materiais cimentícios, que apresentam características comuns dos dois grupos acima mencionados no instante da falha. Costuma-se referenciar tais materiais como quase frágeis, onde observa-se falha frágil à tração e falha com amolecimento (*softening*) à compressão.

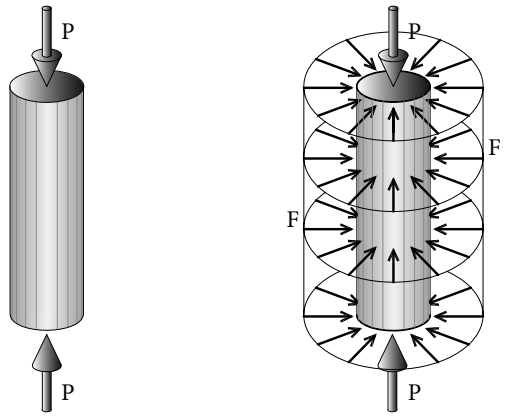


Figura 1.1 Solicitações unidirecionais e multidirecionais. Confinamento.

Deve-se salientar também que heterogeneidades, velocidade de aplicação de carregamentos e a presença de defeitos iniciais podem fazer com que o material se comporte de forma frágil ou dúctil segundo a intensidade do estado de tensão atuante. Assim, a capacidade resistente elástica dos materiais é o resultado de uma combinação complexa de efeitos, o que torna árdua a tarefa de formular matematicamente a previsão dos estados limites em situações complexas de solicitação. O objetivo de um critério de falha é permitir a identificação de cenários de falha local, ou seja, estados inelásticos em pontos materiais, considerando combinações complexas de solicitações, como estados duplos e triplos de tensões. Baseando-se em hipóteses plausíveis sobre o fenômeno responsável pelo desencadeamento do regime inelástico, o critério de falha pode ser expresso matematicamente na forma de uma função que relaciona componentes do tensor de tensões à resistência ou parâmetros de resistência característica do material. Pelo fato de as componentes

do tensor de tensões serem dependentes do sistema de coordenadas utilizado na descrição do problema, tal função deve ser definida em termos de tensões principais, que são invariantes. Portanto, a função do critério de falha pode ser representada numa forma implícita como:

$$f\left(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right)\leq 0 \tag{1.1}$$

sendo que a função f delimita o limite entre as regiões de segurança e falha, ou regimes elástico e inelástico, respectivamente, e σ_1, σ_2 e σ_3 são as tensões principais. Se a Equação (1.1) for atendida, tem-se o domínio de segurança. A seguir serão descritos alguns critérios de falha comumente utilizados em aplicações de engenharia.

1.2.2 Critério de Tresca

Este critério de falha foi proposto por Henri Tresca em 1868, sendo largamente utilizado atualmente para predizer o surgimento de regimes inelásticos em pontos materiais pertencentes a materiais dúcteis. Nesses materiais, em termos fenomenologicamente simplificados, o início do regime inelástico é caracterizado pelo deslizamento dos cristais constituintes da microestrutura do material, os quais não são perfeitamente ordenados/alinhados ao longo de seus planos de contato, como indica a Figura 1.2. Portanto, o surgimento desse deslizamento sugere que a falha possa ser caracterizada por valores limites de tensões de cisalhamento. Destaca-se que a acomodação dos cristais durante o deslizamento conduz a uma nova configuração da microestrutura do material, a qual é mais compacta. Tal fato leva ao *hardening* e ao surgimento de deformações permanentes.

O colapso de barras de aço em ensaios experimentais de tração pura corrobora a constatação de que a falha nos materiais dúcteis está associada a um valor limite de tensão de cisalhamento. Nesse caso, observa-se que a falha ocorre em um plano inclinado de 45º com relação à direção de atuação do carregamento externo, como mostrado na Figura 1.3. Consequentemente, parece intuitivo que esse critério de falha deva relacionar a condição de falha à tensão de cisalhamento resistente do material, uma vez que a falha ocorre nos planos onde as tensões de cisalhamento são máximas.

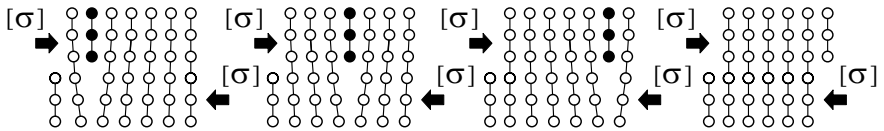


Figura 1.2 Deslizamento dos cristais em materiais dúcteis.

Segundo Tresca, a *teoria da máxima tensão cisalhante* ou *critério de Tresca* estabelece que o regime inelástico se inicia quando a intensidade da tensão de cisalhamento máxima absoluta atuante no material atinge o valor da tensão de cisalhamento que causa o início do escoamento. Dessa forma, esse critério pode ser expresso como:

$$\tau_{MAX}^{ABS} \leq \tau_{RESISTENTE}$$
$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \leq \frac{|\sigma_E|}{2} \tag{1.2}$$

em que σ_E é a tensão de escoamento do material quando submetido a um ensaio de tração uniaxial e s_1 e s_3 as tensões principais atuantes. Quando a Equação (1.2) é atendida observa-se a condição de segurança. Vale destacar que a equação anterior pode ser facilmente obtida utilizando círculos de Mohr.

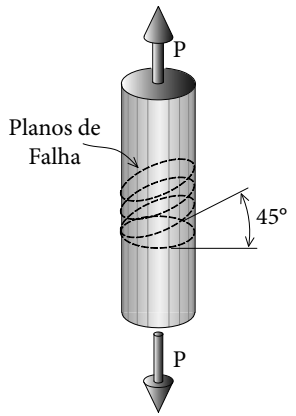


Figura 1.3 Planos de falha em materiais dúcteis. Solicitação uniaxial.

Destaca-se que se o problema analisado é do tipo plano de tensão, no qual uma das tensões principais é nula, a Equação (1.2) conduz a uma representação gráfica interessante. Considerando que o sistema de coordenadas seja

definido pelas tensões principais atuantes no plano, a Equação (1.2) assume a representação gráfica mostrada na Figura 1.4.

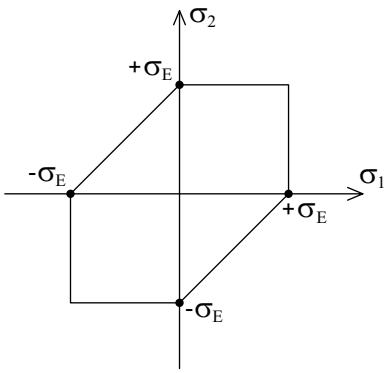


Figura 1.4 Representação gráfica do critério de Tresca para o caso plano de tensão.

Por meio da ilustração apresentada na Figura 1.4, constata-se que os pontos representativos do estado de tensão atuante no plano que se encontram dentro do polígono hexagonal estão em condição de segurança. Já os pontos que estão posicionados fora do polígono representam estados de tensão impossíveis de serem observados, uma vez que tal localização indica a falha estrutural (regime inelástico). O contorno do polígono indica que os pontos materiais estão no limiar da falha.

Se problemas gerais forem considerados, ou seja, aqueles onde as três tensões principais podem ser não nulas, a representação gráfica da Equação (1.2) resulta em um cilindro de base hexagonal, caso este seja representado considerando um sistema de coordenadas definido pelas tensões principais, como indica a Figura 1.5.

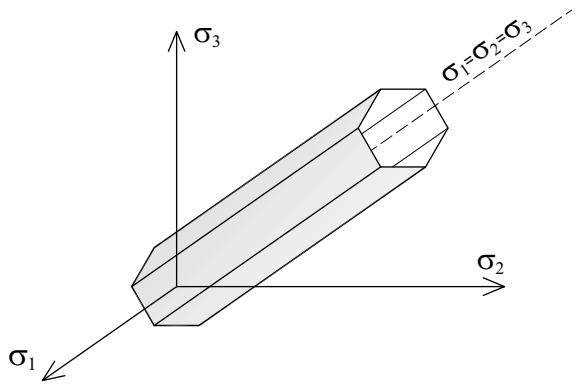


Figura 1.5 Representação gráfica do critério de Tresca para o caso geral.

O eixo no qual $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ é conhecido como eixo hidrostático, sendo que o centro de gravidade da seção transversal desta superfície hexagonal localiza-se ao longo deste eixo. Se o ponto representativo do estado de tensão em análise localiza-se de forma interna à superfície mostrada na Figura 1.5 tem-se condição de segurança. Do contrário observa-se a condição de falha. Destaca-se que a falha não ocorre em estados hidrostáticos de tensão por meio desse critério.

1.2.3 Critério de Von Mises

Esse critério de falha, classicamente conhecido na literatura como *teoria da máxima energia de distorção*, foi formulado inicialmente por Maxwell em 1865. Porém, o critério é atribuído a Von Mises, em seu trabalho *Advanced Mechanics of Materials*, de 1963. Esse critério foi concebido com base em evidências experimentais, sendo largamente utilizado na previsão da falha ou do surgimento de estados inelásticos em materiais dúcteis.

Segundo ensaios experimentais realizados em laboratório, observou-se que materiais dúcteis não atingiam o escoamento quando submetidos a estados hidrostáticos de tensão. Nessa condição, as tensões normais atuantes são idênticas e dadas por $\sigma_{MED} = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$. Como nesse caso o escoamento e o surgimento de um estado inelástico não são observados, conclui-se que a energia de deformação associada ao estado hidrostático de tensões deve ser desconsiderada para a caracterização da falha. Assim, a falha não é influenciada pelas parcelas das tensões associadas a variação volumétrica do material. Portanto, considera-se que a falha seja governada pela contribuição de energia associada às tensões desviadoras no problema, ou seja, a parcela de energia responsável pela distorção do material, o que é consistente com as modificações microestruturais observadas no material no instante de surgimento do regime inelástico.

Segundo as premissas desse critério, o regime inelástico em um material dúctil inicia-se quando a energia de distorção por unidade de volume do material for superior à energia de distorção admissível, ou seja, no instante do início do escoamento. Por simplicidade, usualmente utiliza-se um ensaio de tração uniaxial para a determinação da energia de distorção admissível. Sabe-se que a energia de deformação total é dada por:

$$U = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \qquad \text{com i e j variando de 1 a 3} \tag{1.3}$$

A Equação (1.3) representa a área sob a curva $\sigma x \varepsilon$ para um material de comportamento mecânico elástico linear. Considerando que os estados de tensão e de deformação sejam descritos com base no sistema principal, a energia de deformação total, Equação (1.3), pode ser reescrita explicitamente como:

$$U = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3 \tag{1.4}$$

Usando as expressões da Lei de Hooke generalizada, a Equação (1.4) assume a seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\upsilon\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\right] \tag{1.5}$$

Como a Equação (1.5) representa a energia de deformação total, deve-se subtrair a contribuição referente ao estado hidrostático de tensões, a qual, segundo observações experimentais, não contribui para a falha mecânica. Para tal fim, deve-se subtrair $\sigma_{MED} = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ de cada uma das tensões principais atuantes no problema. Efetuando esse procedimento, obtém-se a energia de distorção por unidade de volume, a qual é associada ao estado desviador, podendo ser escrita como:

$$U_{DISTORÇÃO} = \frac{1+\upsilon}{6E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \tag{1.6}$$

Na condição de falha, a energia de distorção, $U_{DISTORÇÃO}$, dada pela Equação (1.6) deve ser igual à energia de distorção admissível do material. Para avaliar essa grandeza, pode-se utilizar um ensaio de tração uniaxial, o qual conduz a seguinte condição: $\sigma_1 = \sigma_E$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Assim, para a condição admissível em um ensaio de tração uniaxial, a Equação (1.6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} U_{DISTORÇÃO}^{UNIAXIAL} &= \frac{1+\upsilon}{6E}\left[\left(\sigma_E - 0\right)^2 + \left(0-0\right)^2 + \left(0-\sigma_E\right)^2\right] \Rightarrow \\ U_{DISTORÇÃO}^{UNIAXIAL} &= \frac{1+\upsilon}{3E}\sigma_E^2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Considerando a condição de falha, pode-se escrever que:

$$\frac{1+v}{6E}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]=\frac{1+v}{3E}\sigma_E^2$$
$$\sqrt{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2}\leq\sqrt{2}\sigma_E \tag{1.8}$$

A última relação apresentada na Equação (1.8) representa a expressão geral do critério de Von Mises. Assim, observa-se condição elástica, caso a expressão seja atendida, e a condição inelástica, caso contrário.

Para problemas planos de tensão, no qual uma das tensões principais é nula, a equação do critério de Von Mises pode ser particularizada em função das tensões principais atuantes no plano das tensões da seguinte forma:

$$\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2=\sigma_E^2 \tag{1.9}$$

Com base nos conhecimentos da geometria analítica, constata-se que a expressão apresentada na Equação (1.9) representa uma elipse no sistema de coordenadas das tensões principais, como mostra a Figura 1.6. O domínio de segurança é representado pelo conjunto de pontos pertencentes ao interior do contorno da elipse. Já os pontos exteriores à elipse representam estados de tensão não possíveis, já que a falha do corpo, ou o surgimento de estados inelásticos, ocorrerá antes destes estados de tensão serem atingidos. O contorno da elipse indica que os pontos materiais estão no limiar da falha.

Se problemas gerais forem considerados, ou seja, aqueles onde as três tensões principais são não nulas, a representação gráfica da Equação (1.8), segundo a geometria analítica, resulta em um cilindro, se representado no sistema de referência definido pelas tensões principais. Destaca-se que o centro de gravidade da seção transversal do cilindro indicado na Figura 1.7 está localizado ao longo do eixo hidrostático. Como esperado, a falha não é prevista por esse critério quando atuam exclusivamente estados de tensão hidrostáticos. Os pontos representativos do estado de tensão atuante localizados de forma interna ao cilindro indicam estados de tensão em segurança, enquanto os pontos externos ao cilindro indicam estados de tensão que induzem a falha do material. Deve-se salientar que o critério de Von Mises incorpora a influência da tensão principal intermediária, σ_2, o que não é considerado pelo critério de Tresca.

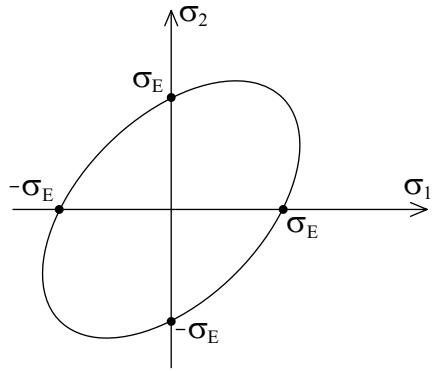


Figura 1.6 Representação gráfica do critério de Von Mises para o caso plano de tensão.

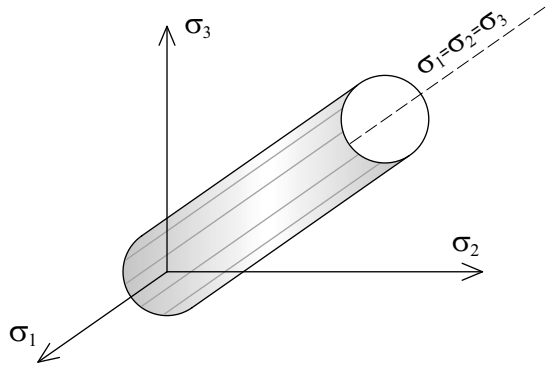


Figura 1.7 Representação gráfica do critério de Von Mises para o caso geral.

1.2.4 Comparativo entre os critérios de Tresca e de Von Mises

Os critérios de Tresca e de Von Mises foram propostos para a previsão da falha, ou do surgimento de estados inelásticos de tensão, em corpos formados por materiais dúcteis. Portanto, é natural o desejo de comparar as previsões da falha fornecidas por ambos. Embora a fenomenologia descrita pelos critérios seja a mesma, as premissas assumidas por ambos são diferentes. Portanto, espera-se que as previsões fornecidas por estes critérios apresentem divergências em situações particulares.

Pode-se comparar a previsão da falha destes critérios assumindo-se, por simplicidade, um estado plano de tensões. Para essa situação, as superfícies de falha descritas no espaço das tensões principais assumem a configuração ilustrada na Figura 1.8. Observa-se, por meio da ilustração apresentada nesta figura, que os critérios concordam entre si sobre a previsão da falha quan-

do uma das tensões principais no plano é nula ou quando ambas são iguais. Porém, para os demais pontos existem pequenas divergências. Em especial, é interessante discutir a diferença na previsão do cenário de falha entre os critérios quando um estado de cisalhamento puro solicita o material. Nessa condição, constata-se que o critério de Von Mises admite um estado de tensão aproximadamente 15% mais intenso que o previsto pelo critério de Tresca. Resultados experimentais em corpos de prova submetidos à torção pura (situação em que tem-se um estado de cisalhamento puro) sugerem que o critério de Von Mises é mais realista na previsão de falha.

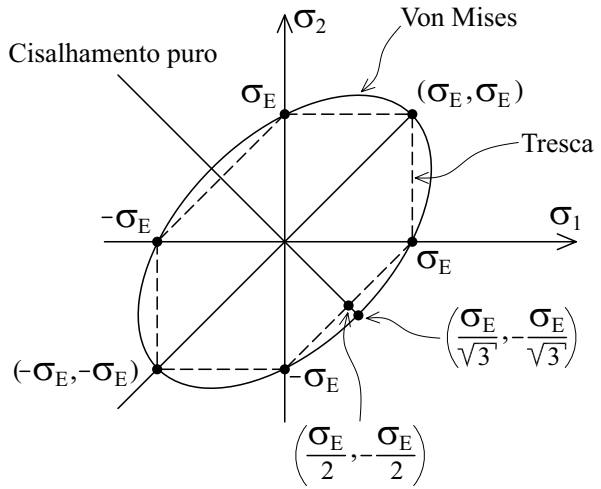


Figura 1.8 Representação gráfica dos critérios de Tresca e Von Mises para o caso plano de tensão.

Em análises envolvendo estados essencialmente tridimensionais de tensões, a representação conjunta das superfícies de falha dos critérios de Tresca e de Von Mises resulta na ilustração apresentada na Figura 1.9. Verifica-se que a superfície cilíndrica de Von Mises circunscreve a superfície hexagonal de Tresca, sendo que a diferença máxima entre elas ocorre na presença de estados de tensão relacionados ao cisalhamento puro. Além disso, observa-se que as superfícies são coincidentes nos pontos de derivadas não contínuas pertencentes à superfície de Tresca.

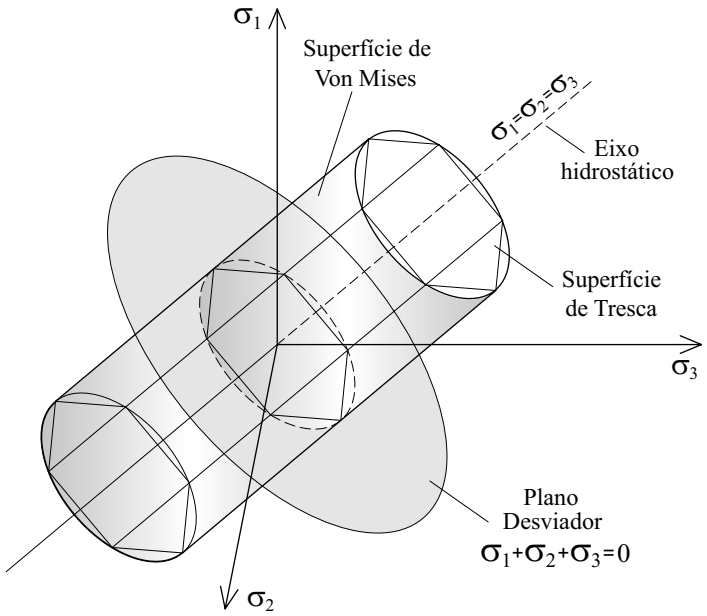


Figura 1.9 Representação gráfica das superfícies de falha de Tresca e Von Mises para o caso geral.

Destaca-se que um dos fatores que colaboram para a divergência observada na previsão dos cenários de falha por ambos os critérios é a incorporação ou não da tensão principal σ_2. Esta tensão principal é desprezada por Tresca sendo incorporada na energia de distorção no critério de Von Mises.

1.2.5 Critério de Rankine

Este critério de falha foi proposto por Rankine em meados do século XIX para a previsão do colapso mecânico de corpos formados por materiais frágeis. Os materiais frágeis caracterizam-se por apresentar ausência de deformações plásticas e falhas em baixos níveis de deformação, se comparados aos materiais dúcteis. Além disso, a falha nesses materiais quase sempre ocorre de forma brusca, ou seja, observa-se a fratura do corpo para o nível de solicitação crítico. Deve-se mencionar que o mecanismo fenomenológico envolvido no processo de falha de materiais frágeis é a ruptura normal da ligação mecânica existente entre os microcomponentes do material. Portanto, o me-

canismo microestrutural envolvido na falha de materiais frágeis é diferente do observado nos materiais dúcteis, o qual é retratado pelos dois critérios de falha discutidos anteriormente. Materiais como vidros, ferro fundido e fibras de vidro, por exemplo, são exemplos de materiais frágeis.

Segundo Rankine, a falha, ou o surgimento de estados inelásticos de tensão, ocorre quando a tensão principal de máximo valor absoluto atingir a resistência à ruptura do material. Assim, em materiais frágeis submetidos a um ensaio de tração uniaxial, por exemplo, a falha ocorrerá quando a tração aplicada, σ_1, superar a tensão de ruptura característica do material, σ_r. Além disso, devido à fenomenologia do processo de falha, observar-se-á a fratura do material na direção normal ao sentido de atuação de σ_1. Complementarmente, no caso de uma barra solicitada pela ação de dois torques M_T, ou seja, uma torção pura conforme ilustrado na Figura 1.10, a fratura ocorrerá em um plano inclinado de 45º com o eixo da barra. A falha ocorrerá nessa posição uma vez que esta inclinação é perpendicular ao sentido de atuação da tensão principal σ_1.

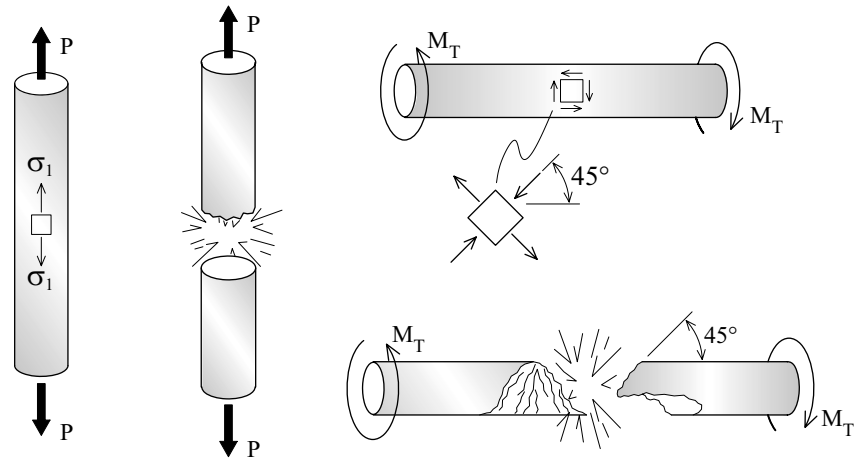


Figura 1.10 Ruptura de materiais frágeis a dois diferentes tipos de solicitação.

Esse critério, também conhecido como *máxima tensão normal*, pode ser matematicamente expresso como:

$$|\sigma_1| \leq |\sigma_r| \;\; e \;\; |\sigma_3| \leq |\sigma_r| \tag{1.10}$$

A Equação (1.10), que define o critério de Rankine, possui uma representação gráfica interessante em problemas de estado plano de tensão, conforme

indica a Figura 1.11. Os pontos representativos do estado de tensão no material que se encontram internamente posicionados no quadrado apresentado na Figura 1.11 estarão em condição de segurança. Do contrário tem-se configurada a falha.

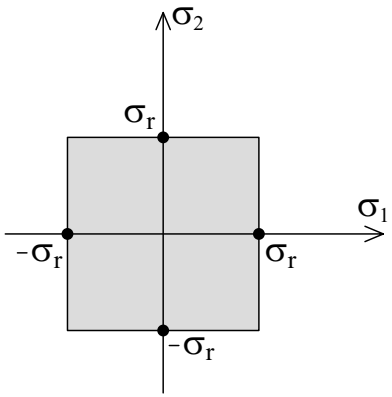


Figura 1.11 Representação gráfica do critério Rankine para o caso plano de tensão.

No contexto de estados tridimensionais de tensão, a representação gráfica do critério de Rankine resulta um cubo, se ilustrado no espaço das tensões principais, com centro no ponto onde as tensões principais são nulas tendo comprimento de aresta igual a $2\sigma_r$. A condição de segurança é observada se o ponto representativo do estado de tensão localiza-se internamente a este cubo e falha em caso contrário.

1.2.6 Critério de Mohr

Este critério de falha foi proposto em 1776 para a previsão da falha, ou do surgimento de estados inelásticos de tensão, em materiais frágeis que possuem resistências à ruptura diferentes em solicitações de tração e de compressão. O critério possui grande importância uma vez que alguns materiais frágeis de uso corrente em engenharia de estruturas rompem diferentemente quando submetidos a estados de tensão trativos e compressivos. Dentre estes materiais destaca-se o concreto, largamente utilizado em aplicações civis. Similarmente, o critério é amplamente empregado em análises da mecânica dos solos.

Para a utilização do critério de falha de Mohr, devem ser conhecidas as resistências à ruptura do material quando este é submetido a:

1. um estado de tração uniaxial, $(\sigma_r)_t$.
2. um estado de compressão uniaxial, $(\sigma_r)_c$.
3. um estado de cisalhamento puro, τ_r.

sendo que os valores de $(\sigma_r)_t$, $(\sigma_r)_c$ e τ_r podem ser determinados por meio de ensaios experimentais que reproduzam as condições 1 a 3 citadas anteriormente.

Dessa forma, para cada uma das condições de carregamento mencionadas nos itens 1 a 3, traçam-se círculos de Mohr, os quais podem ser visualizados na Figura 1.12. Os círculos A, B, C representam estados de tensão na falha material para as condições 2, 1, 3, respectivamente. Os três círculos de Mohr apresentados na Figura 1.12 delimitam uma envoltória de estados de tensão admissíveis. Essa envoltória é obtida tangenciando-se os círculos de Mohr para as condições 1 a 3. Se essa envoltória for delimitada por uma simples reta, este critério recebe o nome de Mohr-Coulomb. Portanto, se o estado de tensão atuante no corpo em análise conduzir a um círculo de Mohr completamente contido no interior da envoltória, o estado de tensão é admissível e o corpo encontra-se em segurança. Caso contrário, observa-se a falha.

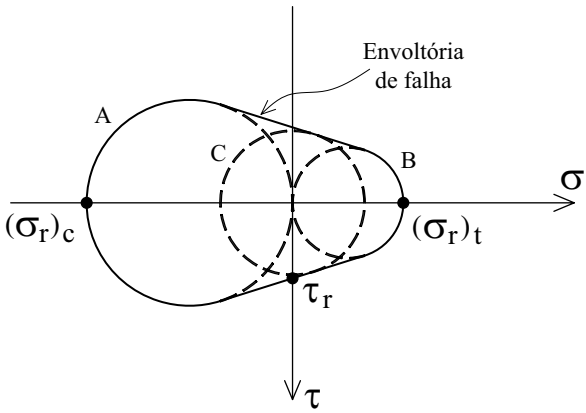


Figura 1.12 Círculos de Mohr para o traçado do critério de falha de Mohr.

Para problemas em estado plano de tensão, o critério de Mohr possui a representação gráfica mostrada na Figura 1.13. Verifica-se que o critério leva em consideração as diferentes resistências à ruptura do material quando solicitado às tensões de tração e de compressão.

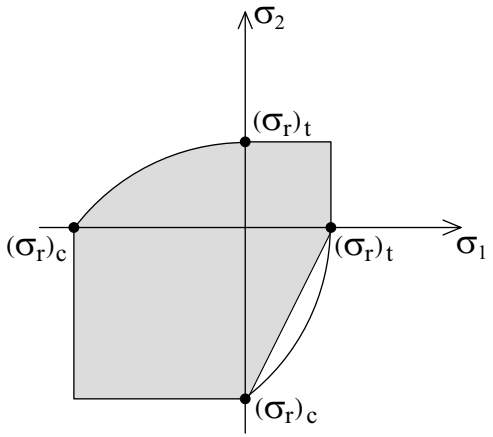


Figura 1.13 Representação gráfica do critério de Mohr para o caso plano de tensão.

Para o caso plano de tensão, a condição de segurança dada pelo critério de Mohr-Coulomb pode ser expressa matematicamente como:

$$\begin{aligned}
&1)\,se\ \ \sigma_1 e \sigma_2 < 0 && \Rightarrow\ \ \sigma_1 > -(\sigma_r)_c \ e\ \sigma_2 > -(\sigma_r)_c \\
&2)\,se\ \ \sigma_1 e \sigma_2 > 0 && \Rightarrow\ \ \sigma_1 < (\sigma_r)_t \ e\ \sigma_2 < (\sigma_r)_t \\
&3)\,se\ \ \sigma_1 < 0\ e \sigma_2 > 0 && \Rightarrow\ \ \sigma_2 < \frac{(\sigma_r)_t}{(\sigma_r)_c}\sigma_1 + (\sigma_r)_t \\
&4)\,se\ \ \sigma_1 > 0\ e \sigma_2 < 0 && \Rightarrow\ \ \sigma_2 > \frac{(\sigma_r)_c}{(\sigma_r)_t}\sigma_1 - (\sigma_r)_c
\end{aligned} \qquad (1.11)$$

Alternativamente, o critério de Mohr-Coulomb pode ser também escrito na seguinte forma:

$$|\tau| = c - \sigma \tan(\phi) \qquad (1.12)$$

em que c representa a coesão do material e ϕ seu ângulo de atrito. Ambos os parâmetros podem ser determinados experimentalmente em ensaios de compressão e de cisalhamento simples. Com base no círculo de Mohr desses dois ensaios, os parâmetros c e ϕ são obtidos como indicado na Figura 1.14. Como apresentado na Equação (1.12), e a título de curiosidade, verifica-se que quando $\phi = 0$, o critério de Mohr-Coulomb degenera-se no critério de Tresca. Além disso, quando $\phi = 90$, o critério de Mohr-Coulomb torna-se equivalente ao critério de Rankine.

Reescrevendo a Equação (1.12) utilizando as tensões principais, e lembrando que a envoltória é uma equação do primeiro grau, obtém-se:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)\cos(\phi)=c-\left[\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)+\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}sen(\phi)\right]\tan(\phi) \Rightarrow$$
$$\sigma_1\left[1+sen(\phi)\right]-\sigma_3\left[1-sen(\phi)\right]=2c\cos(\phi) \quad (1.13)$$

Assim, pode-se expressar o critério de Mohr-Coulomb como:

$$\sigma_1\left[1+sen(\phi)\right]-\sigma_3\left[1-sen(\phi)\right]\leq 2c\cos(\phi) \quad (1.14)$$

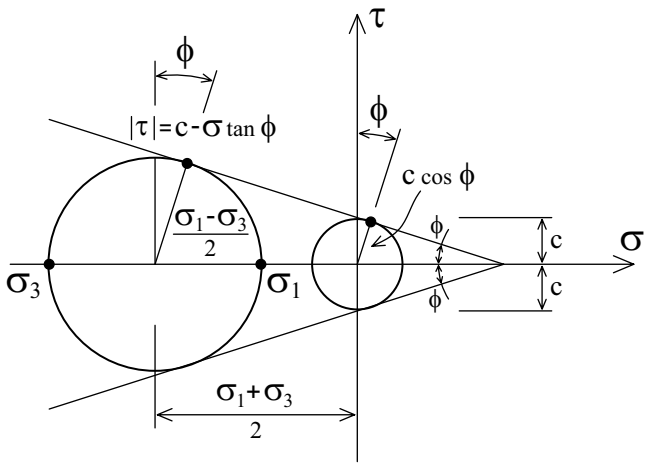


Figura 1.14 Obtenção da coesão e ângulo de atrito material.

Observa-se a condição de segurança se a Equação (1.14) for atendida. A Equação (1.14), que define o critério de Mohr-Coulomb, conduz a uma representação gráfica tridimensional interessante. Esta representação é mostrada na Figura (1.15), a qual resulta em uma pirâmide de base hexagonal irregular definida no espaço das tensões principais. Observa-se a condição de segurança se o ponto representativo do estado de tensão em estudo encontrar-se internamente posicionado à pirâmide e a falha no caso contrário.

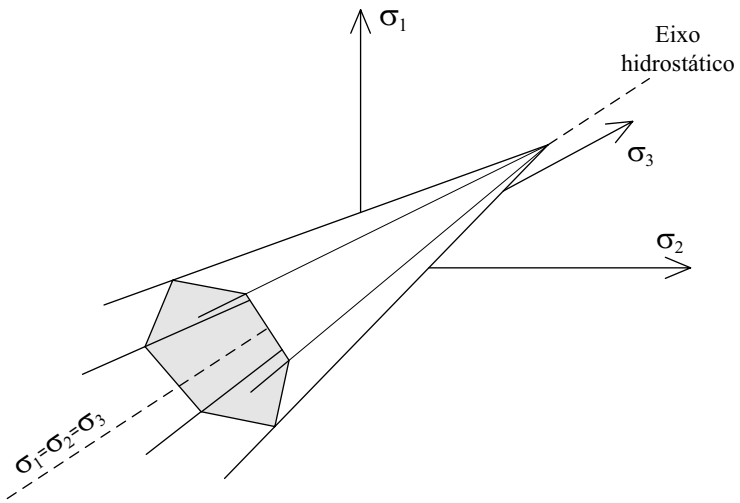


Figura 1.15 Representação gráfica do critério de Mohr-Coulomb para o caso tridimensional.

1.2.7 Critério de Drucker-Prager

Este critério de falha foi proposto por Drucker-Prager em 1952, sendo considerado na literatura uma extensão do critério de Von Mises. O critério foi proposto para a identificação de estados inelásticos de tensão em materiais que apresentam resistências à ruptura diferentes quando solicitados às tensões de tração ou de compressão. No critério de Drucker-Prager, o qual é recomendado para a predição da falha de materiais frágeis, incorpora-se a influência mecânica da tensão hidrostática, a qual é desconsiderada na formulação do critério de Von Mises. Portanto, leva-se em consideração no critério as contribuições energéticas dos estados hidrostático e desviador para o desencadeamento de regimes inelásticos. O critério de falha pode ser matematicamente definido como:

$$\sqrt{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2}+\alpha\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)\leq\kappa \quad (1.15)$$

Se a equação anterior for atendida observa-se a condição de segurança. Do contrário, tem-se a condição de falha material. Deve-se enfatizar que se $\alpha=0$ e $\kappa=\sqrt{2}\sigma_E$ o critério torna-se equivalente ao de Von Mises. Tais parâ-

metros podem ser calibrados/determinados em função da resistência à ruptura característica do material observada em ensaios experimentais. Assim, de acordo com a organização da microestrutura interna do material, é possível ponderar e incluir, no processo de falha, a influência da energia de deformação associada ao estado hidrostático.

No sistema de coordenadas definido pelas tensões principais, a Equação (1.15) delimita uma superfície cônica de base circular, conforme mostra a Figura 1.16. Se o ponto representativo do estado de tensão estiver localizado internamente ao cone definido pelo critério, tem-se condição de segurança. Caso contrário, a falha material é observada.

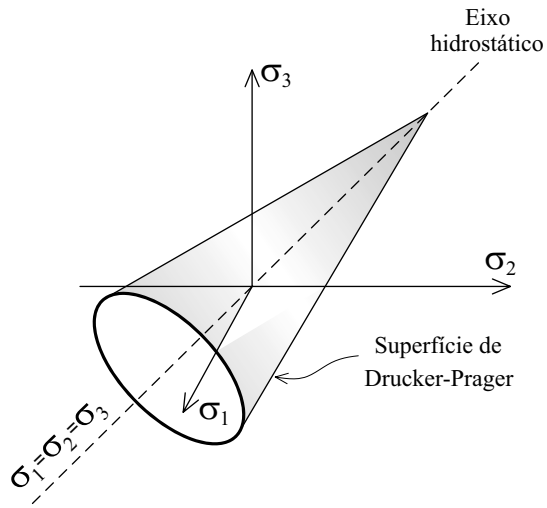


Figura 1.16 Representação gráfica do critério de Drucker-Prager para o caso geral.

Da mesma forma que o critério de Von Mises pode ser considerado como uma versão suavizada do critério de Tresca, como mostrado nas Figuras 1.8 e 1.9, o critério de Drucker-Prager também pode ser considerado como uma versão suavizada do critério de Mohr-Coulomb. Portanto, as variáveis α e κ introduzidas na Equação (1.15) podem assumir definições diferentes segundo o ajuste desejado entre as superfícies dos dois critérios. Esse ajuste é normalmente efetuado fazendo-se coincidir os vértices externos ou internos da superfície hexagonal irregular do critério de Mohr-Coulomb à superfície cônica dada pelo critério de Drucker-Prager. Se esse ajuste for efetuado considerando os vértices externos de Mohr-Coulomb, como mostra a Figura 1.17, essas variáveis ficam assim definidas:

$$\alpha = \frac{2\text{sen}(\phi)}{\sqrt{3}\left(3-\text{sen}(\phi)\right)} \qquad \kappa = \frac{6c\cos(\phi)}{\sqrt{3}\left(3-\text{sen}(\phi)\right)} \tag{1.16}$$

Portanto, com base nos valores da Equação (1.16), o cone de Drucker-Prager circunscreve a superfície de Mohr-Coulomb, conforme mostra a Figura 1.17. Já se o ajuste for efetuado pelos vértices internos de Mohr-Coulomb, esses parâmetros assumem os seguintes valores:

$$\alpha = \frac{2\text{sen}(\phi)}{\sqrt{3}\left(3+\text{sen}(\phi)\right)} \qquad \kappa = \frac{6c\cos(\phi)}{\sqrt{3}\left(3+\text{sen}(\phi)\right)} \tag{1.17}$$

O que faz com que o cone de Drucker-Prager seja circunscrito pela superfície de Mohr-Coulomb, como indica a Figura 1.17. Os parâmetros ϕ e c que surgem nas Equações (1.16) e (1.17) são denominados, similarmente ao apresentado no critério de Mohr-Coulomb, de ângulo de atrito e coesão material, respectivamente, os quais são propriedades materiais. Tais parâmetros são obtidos em ensaios experimentais, sendo dados em relação à superfície de Mohr-Coulomb, sendo ϕ sua inclinação e c sua intersecção com o eixo da tensão de cisalhamento, como mostrado na Seção 1.2.6.

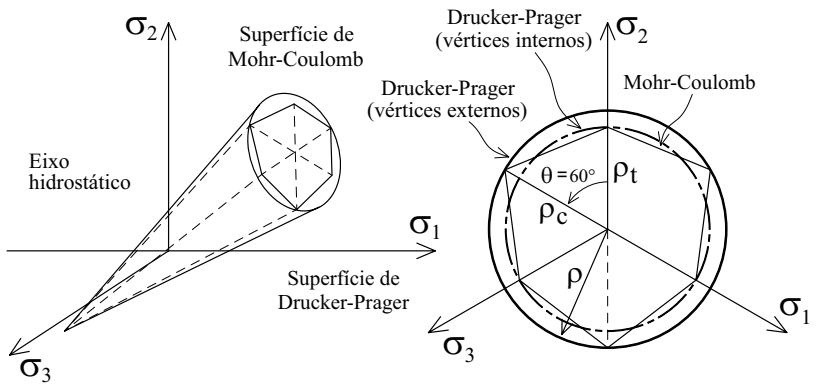


Figura 1.17 Ajuste das superfícies dos critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager.

1.2.8 Aplicação dos critérios de falha em materiais dúcteis. Resistência material explícita

Um ponto material, pertencente a uma estrutura caracterizada pela condição plana de tensão, está submetido ao estado de tensão mostrado na Figura 1.18. Verifique se a falha ocorrerá utilizando os critérios de Von Mises e Tresca. Sabe-se que $\sigma_E = 36\,MPa$.

Com base na ilustração apresentada na Figura 1.18 verifica-se que o tensor de tensões pode ser assim definido:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{xy} & \sigma_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & 18\\ 18 & -12\end{bmatrix}MPa$$

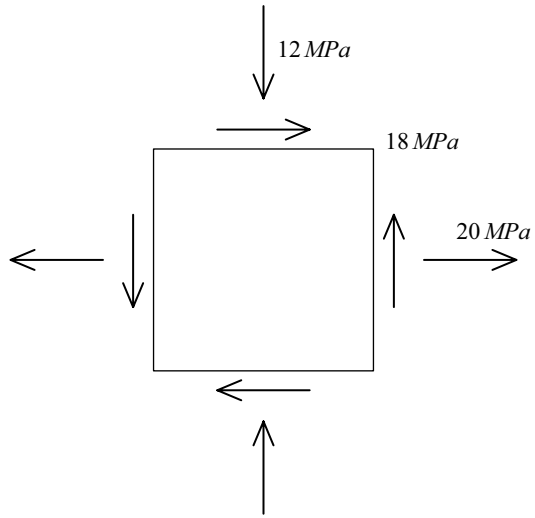


Figura 1.18 Estado de tensão considerado. Tensões dadas em *MPa*.

Para este estado de tensão, as tensões principais são dadas por:

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\left(\tau_{xy}\right)^2}\Rightarrow\sigma_{1,2}=\frac{20-12}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{20+12}{2}\right)^2+(18)^2}$$

$$\sigma_{1,2}=4\pm24{,}083$$

$$\sigma_1=28{,}083\,MPa \qquad \sigma_2=-20{,}083\,MPa$$

Com base nas intensidades das tensões principais atuantes no plano das tensões, obtém-se as tensões principais do problema como:

$$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3$$

$$\sigma_1=28{,}083\,MPa \qquad \sigma_2=0 \qquad \sigma_3=-20{,}083\,MPa$$

Por meio da Equação (1.8) verifica-se o critério de Von Mises. Assim:

$$\sqrt{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2}\leq\sqrt{2}\sigma_E \qquad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(28{,}083-0)^2+(0+20{,}083)^2+(-20{,}0832-28{,}083)}\leq36\sqrt{2} \qquad \Rightarrow$$

$$59{,}262\leq50{,}912$$

Portanto, o estado de tensão atuante não atende ao critério de Von Mises. Dessa forma, a falha material ocorrerá de acordo com a previsão do critério de Von Mises.

Quanto ao critério de Tresca, deve-se verificar se a Equação (1.2) é atendida. Portanto:

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \leq \frac{|\sigma_E|}{2} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{|28,083 + 20,083|}{2} \leq \frac{|36|}{2} \quad \Rightarrow \quad 24,083 \leq 18$$

Como a Equação (1.2) não é atendida, conclui-se que a falha material também ocorrerá com base na previsão realizada pelo critério de Tresca.

1.2.9 Aplicação dos critérios de falha em materiais dúcteis. Resistência material implícita

Um ponto pertencente a um dado material dúctil inicia seu processo de falha, ou início do regime inelástico, quando atua o seguinte estado de tensão: $\sigma_{falha} = \begin{bmatrix} 30 & 25 & 25 \\ 25 & 100 & 25 \\ 25 & 25 & -300 \end{bmatrix} MPa$. Sabendo que uma ação externa desencadeia nesse mesmo material o estado de tensão $\sigma_{solicitação} = \begin{bmatrix} 10 & 250 & 100 \\ 250 & 10 & 0 \\ 100 & 0 & -10 \end{bmatrix} MPa$, verifique se a falha ocorre utilizando os critérios de Tresca e Von Mises.

A solução desse problema passa pela determinação das tensões principais atuantes nos estados de tensão da falha e solicitante. Utilizando a Equação (A.34) obtém-se os seguintes valores para as tensões principais na condição de falha (resistência):

$$\sigma_1^{falha} = 110,437\, MPa$$
$$\sigma_2^{falha} = 22,771\, MPa$$
$$\sigma_3^{falha} = -303,208\, MPa$$

Assim, a tensão de cisalhamento máxima absoluta na falha e a energia de distorção na falha, as quais indicam a resistência do material via Tresca e Von Mises, respectivamente, são dadas por:

$$\tau_{MAX}^{ABS} = \tau_{RESISTENTE} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{|110,437 - (-303,208)|}{2} = 206,823\,MPa$$

$$U_{DISTORÇÃO}^{RESISTENTE} = \frac{1+v}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \Rightarrow$$

$$U_{DISTORÇÃO}^{RESISTENTE} = \frac{1+v}{6E}\left[\begin{array}{l}(110,437 - 22,771)^2 + (22,771 - (-303,208))^2 \\ +(-303,208 - 110,437)^2\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$U_{DISTORÇÃO}^{RESISTENTE} = \frac{1+v}{6E}[285049,822]\,MPa$$

Para a condição de solicitação, a Equação (A.34) conduz aos seguintes valores para as tensões principais:

$$\sigma_1^{solicitação} = 277,965\,MPa$$
$$\sigma_2^{solicitação} = -7,230\,MPa$$
$$\sigma_3^{solicitação} = -260,735\,MPa$$

Portanto, a tensão de cisalhamento máxima absoluta solicitante e a energia de distorção solicitantes são dadas por:

$$\tau_{MAX}^{ABS} = \tau_{SOLICITANTE} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{|277,965 - (-260,735)|}{2} = 269,350\,MPa$$

$$U_{DISTORÇÃO}^{SOLICITANTE} = \frac{1+v}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \Rightarrow$$

$$U_{DISTORÇÃO}^{SOLICITANTE} = \frac{1+v}{6E}\left[\begin{array}{l}(277,965 - (-7,230))^2 + (-7,230 - (-260,735))^2 \\ +(-260,735 - 277,965)^2\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$U_{DISTORÇÃO}^{SOLICITANTE} = \frac{1+v}{6E}[435798,663]\,MPa$$

Dessa forma, por meio do critério de Tresca, a verificação da falha resulta em:

$$\tau_{SOLICITANTE} \leq \tau_{RESISTENTE} \quad \Rightarrow \quad 269,350 \leq 206,823$$

Como a relação não é atendida, conclui-se que ocorrerá a falha segundo a previsão dada pelo critério de Tresca. Já por meio de Von Mises, a verificação da falha conduz a:

$$U_{DISTORÇÃO}^{SOLICITANTE} \leq U_{DISTORÇÃO}^{RESISTENTE} \Rightarrow \frac{1+\upsilon}{6E}[435798,663] \leq \frac{1+\upsilon}{6E}[285049,822]$$

Como a relação não é atendida, conclui-se que o critério de Von Mises também prevê falha nessa condição.

1.2.10 Aplicação dos critério de falha em materiais frágeis

A Figura 1.19 ilustra o estado de tensão atuante, no instante da falha, em um ponto material pertencente a uma estrutura de concreto caracterizada pela condição plana de tensão. Considerando que a resistência à tração do concreto seja igual a 10% de sua resistência à compressão, segundo o critério de Mohr-Coulomb, determine qual deve ser a resistência à compressão mínima para o concreto dessa estrutura.

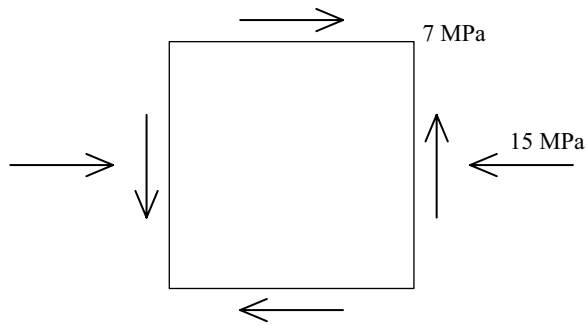


Figura 1.19 Estado de tensão crítico. Tensões dadas em MPa.

Considerando o estado de tensão no instante da falha, verifica-se que este é caracterizado pelo seguinte tensor:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

Portanto, as tensões principais no instante da falha apresentam os seguintes valores:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\tau_{xy}\right)^2} \Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{-15-0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-15+0}{2}\right)^2 + (7)^2}$$

$$\sigma_{1,2} = -7,5 \pm 10,259$$

$$\sigma_1 = 2,759\,MPa \qquad \sigma_2 = -17,759\,MPa$$

O par de valores σ_1 e σ_2 determinado anteriormente pode ser inserido na representação gráfica plana do critério de Mohr-Coulomb, Figura 1.13. Por meio dessa operação, obtém-se a ilustração apresentada na Figura 1.20.

Dada a linearidade da representação gráfica apresentada na Figura 1.20, pode-se aplicar uma simples proporção (semelhança de triângulos) para a determinação da resistência a compressão do concreto. Assim, pode-se escrever que:

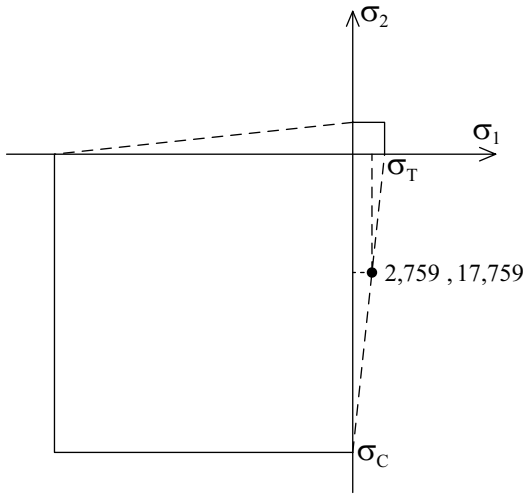


Figura 1.20 Representação do critério de Mohr-Coulomb e o estado crítico de tensão.

$$\sigma_C \;\Leftrightarrow\; \sigma_T$$
$$\left(\sigma_C - 17{,}759\right) \;\Leftrightarrow\; 2{,}759 \;\Rightarrow$$
$$2{,}759\sigma_C = \sigma_C\sigma_T - 17{,}759\sigma_T$$

Sabendo que $\sigma_T = 0{,}10\sigma_C$ tem-se:

$$2{,}759\sigma_C = \sigma_C 0{,}10\sigma_C - 17{,}759\cdot 0{,}10\sigma_C \;\Rightarrow\; 0{,}10\sigma_C = 4{,}5349 \;\Rightarrow$$
$$\sigma_C = 45{,}349\,MPa$$

1.2.11 Comentários gerais sobre outros critérios de falha

Além dos critérios de falha anteriormente descritos, diversos outros critérios são apresentados na literatura para a previsão do surgimento de estados inelásticos de tensão. Tais critérios diferenciam-se na dependência do número de parâmetros característicos do material em sua definição, na incorpora-

ção ou não da influência de estados hidrostáticos de tensão, na consideração ou não de aspectos de não homogeneidade material, entre outros. Com base em cada uma dessas peculiaridades, cada critério pode representar com melhor realismo o limite elástico de materiais que possuem comportamentos mecânicos particulares. Dentre esses materiais destacam-se o concreto, cujo comportamento mecânico depende fortemente dos componentes utilizados em sua dosagem, e os materiais compósitos, cujo comportamento mecânico é fortemente influenciado pelas propriedades de seus constituintes em suas diferentes fases.

Nesse contexto, destacam-se os seguintes critérios de falha: Bresler-Pister, Hsieh-Ting-Chen, Ottosen e Willam-Warnke. O critério de falha proposto por Bresler-Pister, datado de 1958, é uma generalização do critério de Drucker-Prager, no qual é introduzido um terceiro parâmetro que possibilita que a relação entre as tensões de cisalhamento e normal octaédricas seja parabólica. Já o critério de falha de Hsieh-Ting-Chen, de 1982, envolve quatro parâmetros materiais em sua definição. Esse critério admite também que a relação entre as tensões de cisalhamento e normal octaédricas seja parabólica. No entanto, a evolução de sua superfície característica de falha não é mais perfeitamente regular como no caso de Bresler-Pister. Deve-se mencionar que o critério de Hsieh-Ting-Chen requer, em sua caracterização, os valores da resistência à ruptura do material em quatro diferentes configurações de solicitação, o que pode ser um inconveniente em sua utilização. Esse critério de falha fornece adequada predição para o limite elástico do concreto exposto a tensões de confinamento de pequena intensidade.

Outro critério de falha de quatro parâmetros muito utilizado é o de Ottosen, de 1977. Esse critério apresenta as mesmas vantagens do critério de Hsieh-Ting-Chen e ainda admite uma variação da seção transversal da superfície de falha no plano desviador de triangular para circular com o aumento da tensão média. Esse critério é um dos mais robustos para a modelagem do processo de falha do concreto. No entanto, também são necessários ensaios mecânicos de ruptura do material em quatro diferentes configurações de solicitação para a correta caracterização de seus quatro parâmetros. Finalmente, um critério efetivo para a previsão da falha do concreto é o de Willam-Warnke, o qual é descrito com base em cinco parâmetros. Portanto, a definição adequada deste critério requer ensaios de ruptura do material sob cinco diferentes configurações de solicitação, um para cada parâmetro

do critério. O critério admite que a relação entre as tensões de cisalhamento e normais octaédricas seja parabólica e que a seção transversal da superfície de falha no plano desviador seja um traço de elipse, variando de uma forma triangular para circular com o aumento da tensão média.

Conforme discutido nesta seção, existem diversos critérios de falha que possibilitam a distinção entre os domínios elástico e inelástico de materiais com diferentes características. Porém, em diversas situações e configurações estruturais, torna-se de interesse do analista efetuar uma descrição precisa do comportamento mecânico do material e da estrutura quando estes encontram-se em condições predominantemente inelásticas. Destaca-se que, de fato, são nas condições predominantemente inelásticas em que se definem cargas críticas de colapso e configurações de falha do sistema estrutural.

1.3 A REPRESENTAÇÃO DO PROCESSO DE FALHA MATERIAL

No contexto da engenharia de estruturas, inúmeras são as análises que requerem previsão e descrição precisas do colapso mecânico-material com a incorporação do domínio inelástico. Diante dessa demanda, surge a seguinte questão: Quais são as ferramentas e abordagens mais robustas e precisas para a modelagem do processo de falha material? A resposta para essa pergunta não é única e depende enormemente do comportamento mecânico do material que compõe a estrutura em análise, particularmente da sua composição e da organização dos microcomponentes de sua microestrutura interna.

Atribuem-se a Leonardo da Vinci e a Galileo Galilei os primeiros estudos que objetivaram a compreensão e a descrição dos mecanismos que governam os processos de colapso mecânico-material. Por meio de experimentos simples, os renomados cientistas idealizaram distribuições de tensão e deformação, as quais posteriormente foram utilizadas como medidas para a modelagem do processo de falha e obtenção de valores limites para os carregamentos atuantes. A seguir discute-se, de forma bastante sucinta, aspectos gerais de três teorias frequentemente utilizadas na modelagem do processo de falha mecânico-material: teoria da plasticidade, mecânica do dano e mecânica da fratura.

A teoria da plasticidade tem sido largamente utilizada na descrição do comportamento mecânico de materiais dúcteis, especialmente metais, quando o estado de tensão atuante supera o limite elástico do material. Com base nessa abordagem, utiliza-se um critério de resistência/falha para a determi-

nação dos limites entre os regimes elástico e plástico. Além disso, tornam-se ainda necessárias a definição de uma regra de encruamento, que governa a mudança das propriedades mecânicas do material durante o fluxo plástico, e de uma regra de fluxo, a qual fornece a relação incremental entre tensões e deformações na fase elastoplástica. Por meio da teoria da plasticidade assume-se a hipótese de continuidade do material, sendo seus parâmetros de rigidez corrigidos à medida que as deformações plásticas evoluem. Essa abordagem possibilita a descrição adequada da evolução das deformações plásticas em materiais dúcteis nos trechos de encruamento (*hardening*). No entanto, não é capaz de representar adequadamente e consistentemente a parte final do processo de falha (*softening*), na qual observam-se a perda de coesão e separação entre os microcomponentes que compõem a microestrutura do material. Destaca-se que a descrição da falha do material causada por descontinuidades materiais (fissuras) não é consistentemente tratada por meio dessa abordagem, já que se viola, nesse caso, a hipótese de continuidade material. Porém, ela pode ser utilizada para a obtenção de respostas aproximadas. A modelagem da falha por meio desta teoria é largamente utilizada em programas comerciais, especialmente baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF), e utilizada por engenheiros em detrimento de teorias mais elaboradas.

A mecânica do dano é uma extensão natural da teoria da plasticidade, na qual incorpora-se consistentemente a descrição da degradação mecânico-material em macroescala causada pela presença de descontinuidades materiais (fissuras) em micro e meso escalas. Esta representação é efetuada por meio de uma grandeza, denominada parâmetro de Dano, a qual pode ser um simples escalar ou mesmo um tensor segundo a complexidade de tal descrição. Destaca-se que a abordagem ainda assume a hipótese de continuidade material, embora o fenômeno desencadeador da degradação do material seja em essência descontínuo. Dessa forma, o parâmetro de Dano reflete o estado da degradação mecânico-material equivalente em macroescala causado por fissuras em micro e meso escalas. Portanto, esta abordagem permite a caracterização mecânica de um elemento representativo de volume (ERV) em macroescala com propriedades mecânicas que incorporam a degradação mecânica em escalas menores. O parâmetro de Dano usualmente varia entre 0 e 1 e penaliza as propriedades mecânicas do material ao longo das direções que o definem. Portanto, Dano 0 indica material sem nenhuma degradação en-

quanto Dano 1 indica descontinuidade material. Assim, esta abordagem possibilita a representação de comportamentos de *softening* material de maneira consistente. Materiais que apresentam *softening*, como concretos, materiais cerâmicos, compósitos e materiais cimentícios podem ser tratados por meio desta abordagem quando o nível de degradação mecânica não é crítico, ou seja, quando a degradação mecânica não é essencialmente discreta na escala da análise (usualmente a macroescala). Nesta abordagem, é necessária a definição de um critério de resistência/falha para a determinação dos limites entre os regimes elástico e inelástico do material. Além disso, tornam-se ainda necessárias a definição de uma lei de evolução de dano, que governa a variação do valor do Dano em função do incremento no campo de deformações no material, e de uma relação constitutiva penalizada, que fornece a dependência entre os incrementos de tensão e deformação durante o regime inelástico segundo a intensidade do Dano. Note aqui as similaridades existentes entre as abordagens de plasticidade e dano: regra de fluxo e lei de evolução do dano; regra de encruamento e relação constitutiva penalizada; ambas requerem um critério de falha.

A mecânica da fratura descreve os processos de degradação mecânico-material considerando os defeitos (fissuras) presentes no material de forma discreta. Assim, nesta abordagem, não se assume mais como válida a hipótese de continuidade material. Essa é a principal diferença desta abordagem em comparação com a plasticidade e o dano. O crescimento e a evolução da degradação mecânica são representados via propagação das fissuras, as quais podem inclusive apresentar coalescência e localização. Na mecânica da fratura, os fenômenos que causam redução da integridade material são consistentemente representados de forma discreta, sendo que sua evolução resulta na descrição natural da redução da rigidez do elemento estrutural e na configuração de falha. Tais processos são representados por modelos que descrevem o comportamento mecânico-material na região próxima à extremidade das fissuras, de forma a incorporar adequadamente os fenômenos severos de dissipação de energia existentes nessas regiões.

Para complementar a discussão apresentada anteriormente, deve-se também mencionar a influência que a escala utilizada na descrição dos fenômenos de degradação mecânico-material tem na análise do problema. Particularmente, destaca-se a influência que a escala utilizada na descrição do defeito material tem na escala utilizada pelo analista para a representação do

comportamento mecânico-material. Com relação à escala dos problemas analisados tem-se:

- Microescala: A degradação mecânica do material nesta escala ocorre devido à ação de concentrações de tensão sobre a vizinhança de microdefeitos (microfissuras) ou mesmo micro vazios inerentemente contidos na microestrutura do material. Nesse nível de observação, constata-se a quebra da ligação mecânica entre os componentes microestruturais do material. Como consequência, observa-se o crescimento e a localização dessas microdegradações. Em metais, por exemplo, a degradação mecânica em microescala ocorre por meio do deslocamento relativo entre os cristais que formam a microestrutura do material, como ilustrado na Figura 1.2. Já em concretos, a degradação mecânica nessa escala ocorre na zona de transição existente entre matriz e agregado graúdo.
- Mesoescala: Nesta escala, um elemento representativo de volume (ERV) do material observa o crescimento de microdefeitos e/ou microvazios, os quais por coalescência iniciam uma região de fragilidade e por consequência uma fissura. Em metais, nesse nível de observação, tal degradação mecânica ocorre devido ao deslocamento relativo de um bloco formado por um conjunto de cristais da microestrutura do material. Já em concretos, a degradação mecânica associada a perda da coesão entre a argamassa e o agregado graúdo enquadra-se nesse nível de observação. Destaca-se que os fenômenos mecânicos observados em microescala e em mesoescala podem ser consistentemente representados por meio das teorias da plasticidade e da mecânica do dano, caso o objetivo da análise seja mensurar os efeitos dessas degradações no comportamento mecânico do corpo em sua macroescala. Devido ao fato de as degradações mecânicas ocorrerem em escalas menores e usualmente não conduzirem a comportamentos mecânicos predominantes de *softening*, pode-se ainda assumir como válida a hipótese de continuidade do meio no caso de tais efeitos serem mensurados em macro escala.
- Macroescala: Nessa escala, a degradação mecânica do material ocorre devido ao crescimento de uma ou mais descontinuidades materiais (fissuras) geradas da coalescência dos microdefeitos em micro e mesoescalas. As descrições mecânicas neste estágio de observação são consistentemente efetuadas por meio da mecânica da fratura, já que tais defeitos são essencialmente discretos se observados em todas as escalas.

Deve-se destacar que a diferenciação entre micro, meso e macroescalas apresentada anteriormente depende obviamente da escala escolhida para a realização das análises mecânicas, ou seja, da escala escolhida para a mensuração dos efeitos dos defeitos e de suas consequências. Sendo assim, é possível também aplicar a mecânica da fratura nas análises em micro e mesoescalas se as consequências analisadas são também mensuradas em micro e mesoescalas, respectivamente. Nesse caso, as degradações mecânicas são essencialmente descontínuas nas escalas de análise. Por outro lado, as teorias da plasticidade de mecânica do dano não conduzem a representações consistentes quando a macro escala é a escala dos defeitos mecânicos e da análise. Nessa situação, os defeitos no material são essencialmente descontínuos na escala da análise, sendo que essas teorias assumem a hipótese de continuidade do material. Portanto, a aplicação das teorias anteriormente mencionadas possibilita a representação consistente do colapso mecânico de materiais. No entanto, destaca-se que tal representação está diretamente associada à proporção entre o tamanho dos defeitos materiais e a dimensão escolhida para mensurar suas consequências.

Destaca-se que defeitos de microescala estão associados, por exemplo, à quebra da ligação atômica entre os átomos que formam o material, conforme anteriormente mencionado. Quando várias ligações atômicas localmente concentradas são quebradas, ocorre o deslocamento de um conjunto regular de átomos, comumente denominado cristal. Caracterizam-se os fenômenos de degradação mecânica em mesoescala quando um conjunto de cristais ou ERV começa a deslocar-se diferencialmente até a formação de uma microfissura discreta. O movimento relativo dos cristais ou ERVs une as zonas de fragilidade do material até a localização da degradação mecânica formar uma fissura. A partir do surgimento de uma degradação mecânica discreta na escala da análise, tal deve ser conduzida pela mecânica da fratura. Porém, as zonas de fragilidade em micro e mesoescalas podem ser também simuladas via mecânica da fratura. Basta que estas descontinuidades atômicas e dos cristais sejam representadas de forma discreta. Assim, independentemente da escala de análise, os efeitos em micro e mesoescalas podem ser avaliados e a união dos campos de fragilidade das ligações atômicas e da ligação entre cristais podem ser mensuradas via análise de coalescência.

Devido à natureza complexa do fenômeno de fratura, o tratamento dos problemas micro, meso e macro ainda não são efetuados assumindo-se hi-

póteses únicas. Enquanto na abordagem em nível atômico o estudo da fratura ocorre usando-se os conceitos da mecânica quântica, na modelagem dos problemas macro assumem-se as hipóteses da mecânica dos sólidos (newtoniana) e da termodinâmica clássica. Portanto, apesar dos recentes avanços observados no domínio de análises em múltiplas escalas, o campo de pesquisas no domínio da mecânica da fratura é ainda muito amplo e restam diversos aspectos a serem desenvolvidos, principalmente na adoção de hipóteses únicas que abranjam todos os níveis de análise e simulação. Assim, em resumo:

- Microescala: É a escala utilizada para o estudo dos mecanismos de deformação e da gênese da degradação mecânica.
- Mesoescala: É a escala na qual as equações constitutivas da análise mecânica convencional são escritas, sendo muitas vezes utilizada na idealização do início do processo de colapso devido a descontinuidades materiais.
- Macroescala: É a escala da engenharia de estruturas. É a escala na qual estruturas são concebidas e mensurados os efeitos mecânicos dos carregamentos atuantes.

CAPÍTULO 2
Tópicos elementares da teoria da plasticidade. Elastoplasticidade unidimensional

2.1 BREVE HISTÓRICO

O marco inicial da teoria da plasticidade ocorreu com o trabalho de Tresca (1864), o qual versa sobre o processo de extrusão em metais. Nesse trabalho, foi apresentado um critério de falha (critério de Tresca) segundo o qual um metal deforma-se plasticamente quando a tensão de cisalhamento máxima absoluta atinge um valor limite resistente. Saint-Venant (1870) apresentou as relações constitutivas, para estados planos, de um material rígido-plástico. Saint-Venant propôs também uma regra de fluxo para este caso. Von Mises (1913) apresentou um critério de falha que tem como base a limitação sobre a tensão octaédrica de cisalhamento (invariante de tensões desviadoras). Em Von Mises (1928) é efetuada a generalização dos conceitos apresentados em Von Mises (1913) para permitir a adoção de uma função arbitrária na descrição do fluxo plástico (regra de fluxo não associativa). Além disso, Von Mises apresentou uma relação entre a direção da deformação plástica e a superfície

de plastificação, definindo a regra de fluxo plástico. Prandtl (1924) incluiu nas equações desenvolvidas por Saint-Venant/Von Mises a componente elástica da deformação, conceituando o modelo elastoplástico, e Reuss (1930) fez a extensão para o caso tridimensional.

O foco das discussões, nos trabalhos previamente mencionados, envolvia o comportamento rígido ou elastoplástico perfeito. As relações constitutivas para materiais que apresentam o fenômeno do encruamento (*hardening*) foram desenvolvidas posteriormente, podendo-se citar o trabalho de Melan (1938). Nas décadas de 1940 e 1950 houve intensa pesquisa voltada ao desenvolvimento dos conceitos básicos da chamada Teoria Clássica da Plasticidade em Metais. Prager (1949) definiu relações constitutivas para materiais com encruamento e superfícies de plastificação regulares. Foram também formulados e discutidos conceitos importantes como: função de carregamento (ou plastificação), incorporação dos efeitos mecânicos associados às condições de carregamento e de descarregamento, condição de consistência e a de irreversibilidade da deformação plástica. A inter-relação entre a convexidade da superfície de carregamento, a regra da normalidade em relação ao incremento de deformação plástica e a unicidade da solução do problema de valor de contorno associado foram claramente estabelecidos. A partir desses conceitos, Drucker (1951) propôs o chamado Postulado da Estabilidade de um material, o que permitiu provar a unicidade da solução tanto para materiais elastoplásticos perfeitos quanto para os que sofrem encruamento.

Na sequência deste capítulo será apresentada uma breve descrição sobre a teoria da elastoplasticidade unidimensional. Obviamente que não se pretende exaurir o tema aqui, mas apenas ilustrar sua aplicação em casos unidimensionais. Treliças planas serão utilizadas para este propósito. Maiores detalhes sobre teoria da plasticidade e formulações elastoplásticas podem ser consultados em Chen e Han (1988), Simo e Hughes (1997) e nos trabalhos citados nos itens a seguir.

2.2 FUNDAMENTOS

Macroscopicamente, o comportamento plástico de um material surge quando são observadas deformações irreversíveis, ou seja, não recuperáveis ou

permanentes, em um ciclo de carregamento e descarregamento. Tais deformações podem ser associadas a valores limites para as intensidades das tensões, as quais possibilitam a definição de valores limites para os carregamentos atuantes. Os materiais possuem uma capacidade finita para transmissão/suporte de tensões. Esse limite pode ser determinado via critérios de falha, conforme discutido na Introdução, e pela tensão de escoamento.

No contexto de análises elastoplásticas unidimensionais, os materiais elastoplásticos perfeitos são aqueles em que o estado de tensão atuante nos pontos materiais da estrutura é idealmente restringido pelo limite elástico, usualmente assumido igual à tensão de escoamento. Assim, uma vez que seja atingida e mantida a igualdade entre os estados de tensão atuante e limite, toda a deformação adicional que passa a ocorrer no material é exclusivamente de natureza plástica, conforme ilustra a Figura 2.1, para o caso de tração uniaxial. Dessa forma, a rigidez elástica é nula após o limite elástico ser alcançado. Materiais que suportam estados de tensão superiores ao limite elástico apresentam o fenômeno do encruamento (*hardening*), como indicado na Figura 2.2. Nesse caso, a rigidez elástica do material após ser superado o limite elástico é não nula, porém, usualmente menor que a rigidez elástica. Nos materiais que suportam regime elastoplástico com encruamento, a deformação total é composta por parcelas plástica e elástica, ou seja, no trecho com encruamento, os dois tipos de deformação evoluem simultaneamente. Nesse regime não há uma correspondência unívoca entre tensão e deformação, sendo necessário o conhecimento do histórico de carregamento, caracterizado pelo nível de deformação plástica acumulada. Deve-se mencionar que o fenômeno de encruamento do material é complexo. Nas situações em que o carregamento atuante não é monotonicamente crescente, ou seja, podem ocorrer inversões no sentido das deformações, a evolução das propriedades mecânicas do material pode ser aproximada por modelos de encruamento do tipo: isótropo, cinemático ou misto, por exemplo. Porém, tais idealizações do comportamento de encruamento conduzem a previsões idênticas em condições de carregamento que não introduzem inversões nos sentidos das deformações.

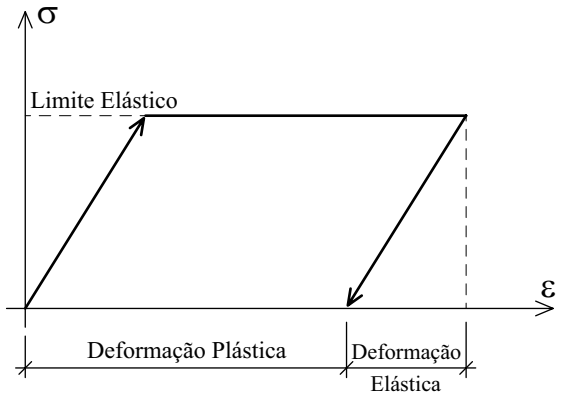


Figura 2.1 Comportamento elastoplástico perfeito.

Destaca-se que uma análise elastoplástica requer a definição de três aspectos principais. O primeiro deles diz respeito à escolha de um critério de falha, o qual tem por função a separação entre os domínios elástico e inelástico. O segundo envolve a definição de uma regra de fluxo, a qual tem por função governar a evolução das deformações plásticas, em relação a deformação total, durante o fluxo plástico. Esta regra é denominada associativa quando a função de potencial plástico coincide com a função que descreve o critério de falha. Quando funções diferentes são utilizadas, diz-se que a regra de fluxo é não associativa. O terceiro aspecto refere-se a regra de encruamento, a qual estabelece a dependência entre tensões e deformações durante a evolução das deformações plásticas. Nos tópicos seguintes deste capítulo, estes aspectos serão discutidos para o caso unidimensional.

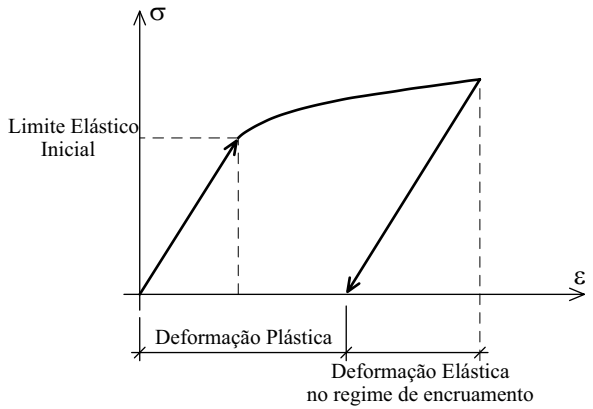


Figura 2.2 Comportamento elastoplástico com encruamento.

ASPECTOS TEÓRICOS DA MECÂNICA DA FRATURA

MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICO-LINEAR ■ MECÂNICA DA FRATURA NÃO LINEAR ■ FADIGA ■ MECÂNICA DO DANO ■ ELASTOPLASTICIDADE

Aspectos teóricos da mecânica da fratura apresenta teorias que descrevem de maneira consistente os processos de falha mecânico-material. Critérios de falha, elastoplasticidade e mecânica do dano preveem a falha em macroescala, assumindo continuidade material, enquanto a mecânica da fratura cumpre esse papel incorporando de forma discreta as descontinuidades materiais. São tratados materiais isótropos ou anisótropos, com pequenas ou extensas zonas de processos inelásticos.

Esta obra é resultado dos esforços envidados pelo autor desde 2004 na compreensão dos processos de falha estrutural. Seu conteúdo é destinado a estudantes e pesquisadores que farão o primeiro contato com as teorias de previsão e descrição da mecânica da fratura.

O que você vai encontrar:

- Fundamentos da mecânica da fratura elástico-linear
- Fundamentos da mecânica da fratura não linear
- Exemplos resolvidos e códigos computacionais para a solução de problemas em regime linear e não linear
- Fadiga e suas aplicações
- Mecânica do dano contínuo
- Solução não linear usando modelo de dano de Mazars
- Elastoplasticidade unidimensional
- Critérios de resistência e suas limitações

"A modelagem consistente da deterioração material é vital para análises de integridade estrutural. Esta obra aborda as teorias de plasticidade, dano e fratura, trazendo exemplos resolvidos e códigos computacionais. É uma leitura indispensável para pesquisadores e profissionais de engenharia que atuam no projeto estrutural."

Sergio P. B. Proença

Professor titular na Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC-USP)

EDSON DENNER LEONEL

Engenheiro, pesquisador e professor, com atuação destacada em Engenharia de Estruturas. É professor titular no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, onde se dedica à proposição de modelos para a descrição da falha mecânico-material com ênfase particular na propagação de fissuras. É reconhecido por suas abordagens não lineares da mecânica da fratura, usualmente acopladas ao Método dos Elementos de Contorno.

Conheça mais livros em:

Blucher.com.br

ISBN 978-85-212-2933-9