

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>14</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>17</b>
<b>Prefácio</b>	<b>23</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>25</b>
1.1 Conceitos básicos . . . . .	25
<b>2 Barra em tração e viga em flexão pura</b>	<b>29</b>
2.1 Barra em tração simples . . . . .	29
2.2 Viga em flexão pura . . . . .	31
2.3 Coeficientes de influência . . . . .	32
2.4 Elemento de mola . . . . .	34
2.5 Elemento de barra plana . . . . .	36
2.5.1 Deformação longitudinal específica e tensão normal . . . . .	37
2.5.2 Elemento de barra no sistema global de referência . . . . .	37
2.6 Determinação da equação global . . . . .	40
2.6.1 Cálculo das deformações e tensões nos elementos de barra . . . . .	46
2.7 Elemento de viga em flexão pura . . . . .	47
2.8 Elemento de viga em tração e flexão . . . . .	54
2.9 Exercícios propostos . . . . .	57
<b>3 Introdução ao programa ANSYS</b>	<b>59</b>
3.1 Organização do ANSYS . . . . .	60
3.2 Treliça . . . . .	62
3.3 Viga . . . . .	90
3.4 Exercícios propostos . . . . .	102
<b>4 Equações básicas de elasticidade</b>	<b>105</b>
4.1 Estado geral de deformação . . . . .	105
4.2 Deformações térmicas . . . . .	110

4.3	Conceito de tensão . . . . .	111
4.4	Estado de tensão em um ponto . . . . .	114
4.5	Equações diferenciais de equilíbrio . . . . .	119
4.6	Lei de Hooke . . . . .	122
4.7	Exercícios propostos . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Equação de movimento</b>	<b>127</b>
5.1	Trabalho e energia de deformação . . . . .	127
5.2	Identidade de Green . . . . .	132
5.3	Princípio dos Trabalhos Virtuais . . . . .	134
5.4	Discretização de um sistema contínuo . . . . .	141
5.5	Equação de movimento . . . . .	142
5.6	Elemento de barra plana . . . . .	145
5.7	Elemento de viga plana . . . . .	148
5.8	Forma fraca do problema de barra em tração . . . . .	150
5.9	Exercícios propostos . . . . .	152
<b>6</b>	<b>Funções de interpolação</b>	<b>153</b>
6.1	Sistemas de referência global e local . . . . .	153
6.2	Funções de forma . . . . .	156
6.3	Elementos unidimensionais . . . . .	157
6.3.1	Elemento linear . . . . .	157
6.3.2	Elemento quadrático . . . . .	158
6.3.3	Elemento cúbico . . . . .	159
6.3.4	Elemento quártico . . . . .	160
6.4	Elemento bidimensional linear . . . . .	161
6.5	Elementos isoparamétricos . . . . .	163
6.6	Jacobiano e cálculo das derivadas globais . . . . .	166
6.7	Dedução da matriz de rigidez de barra plana . . . . .	169
6.8	Exercícios propostos . . . . .	171
<b>7</b>	<b>Funções de forma para quadrados e hexaedros</b>	<b>173</b>
7.1	Triângulo de Pascal . . . . .	173
7.2	Quadrados . . . . .	176
7.2.1	Elemento quadrático . . . . .	176
7.2.2	Elemento cúbico . . . . .	181
7.2.3	Elemento quártico . . . . .	183
7.3	Hexaedros . . . . .	185
7.3.1	Elemento linear . . . . .	185
7.3.2	Elemento quadrático . . . . .	187
7.3.3	Elemento cúbico . . . . .	188

<b>8 Funções de forma para triângulos e tetraedros</b>	<b>193</b>
8.1 Coordenadas de área . . . . .	193
8.2 Triângulos . . . . .	194
8.2.1 Elemento linear . . . . .	195
8.2.2 Elemento quadrático . . . . .	196
8.2.3 Elemento cúbico . . . . .	200
8.2.4 Elemento quártico . . . . .	200
8.2.5 Cálculo do jacobiano e das derivadas globais . . . . .	204
8.3 Coordenadas de volume . . . . .	206
8.4 Tetraedros . . . . .	207
8.4.1 Tetraedro linear . . . . .	208
8.4.2 Tetraedro quadrático . . . . .	209
8.4.3 Tetraedro cúbico . . . . .	211
8.4.4 Cálculo do jacobiano e das derivadas globais . . . . .	212
8.5 Exercícios propostos . . . . .	214
<b>9 Integração numérica</b>	<b>215</b>
9.1 Quadratura de Newton-Cotes . . . . .	215
9.2 Quadratura de Gauss-Legendre . . . . .	217
9.3 Integração numérica bidimensional . . . . .	220
9.4 Integração numérica tridimensional . . . . .	225
9.5 Exercícios propostos . . . . .	225
<b>10 Estudo de casos</b>	<b>227</b>
10.1 Estado plano de tensão . . . . .	227
10.2 Estado plano de deformação . . . . .	233
10.3 Estruturas axissimétricas . . . . .	234
10.4 Considerações sobre elementos finitos isoparamétricos . . . . .	240
10.4.1 Integração numérica . . . . .	240
10.4.2 Cálculo de tensões . . . . .	242
10.4.3 Considerações sobre modelamento . . . . .	242
10.5 Exercícios propostos . . . . .	243
<b>Referências bibliográficas</b>	<b>245</b>
<b>A Vetores e matrizes</b>	<b>247</b>
A.1 Vetores . . . . .	247
A.2 Matrizes . . . . .	248
A.2.1 Matriz nula . . . . .	249
A.2.2 Matriz quadrada . . . . .	249
A.2.3 Matriz diagonal . . . . .	249
A.2.4 Matriz unitária ou identidade . . . . .	249

A.2.5	Matrizes diagonais superior e inferior . . . . .	250
A.2.6	Matriz banda . . . . .	250
A.2.7	Matrizes simétrica e antissimétrica . . . . .	251
A.2.8	Particionamento de uma matriz . . . . .	251
A.2.9	Matriz transposta . . . . .	252
A.3	Operações matriciais . . . . .	252
A.3.1	Igualdade . . . . .	252
A.3.2	Adição e subtração . . . . .	252
A.3.3	Multiplicação . . . . .	252
A.4	Sistema de equações lineares . . . . .	253
A.5	Problema de autovalor . . . . .	253
<b>B</b>	<b>Método de Cholesky</b>	<b>255</b>
B.1	Decomposição de Cholesky . . . . .	255
B.2	Aplicação do método de Cholesky . . . . .	257
<b>C</b>	<b>Comandos do programa ANSYS</b>	<b>259</b>
C.1	Comandos do ANSYS . . . . .	259
C.1.1	Nós . . . . .	259
C.1.2	Elementos . . . . .	260
C.1.3	Tipo de elemento . . . . .	260
C.1.4	Constantes reais . . . . .	260
C.1.5	Carregamentos e condições de contorno . . . . .	261
C.1.6	Casos de carregamentos . . . . .	261
C.1.7	Material . . . . .	261
C.1.8	Sistemas de coordenadas . . . . .	262
C.1.9	Reordenamento dos elementos . . . . .	262
C.1.10	Tipo de análise . . . . .	262
C.1.11	Pontos . . . . .	262
C.1.12	Linhas . . . . .	263
C.1.13	Áreas . . . . .	264
C.1.14	Volumes . . . . .	264
C.1.15	Geração de malha . . . . .	265
C.1.16	Aplicação de condições de contorno ao modelo sólido . . . . .	265
C.1.17	Seleção de entidades . . . . .	266
C.1.18	Comandos / . . . . .	266
C.1.19	Graus de liberdade <i>masters</i> . . . . .	266
C.1.20	Comandos de visualização . . . . .	266
C.1.21	Pós-processador . . . . .	267
C.1.22	Outros comandos . . . . .	267

<b>D Exemplos analisados com o ANSYS</b>	<b>269</b>
D.1 Estrutura reticulada . . . . .	269
D.2 Deformação em vigas . . . . .	271
D.3 Pórtico . . . . .	272
D.4 Estudo de um eixo . . . . .	275
D.5 Viga: problema de estado plano de tensão . . . . .	278
D.6 Problema com simetria . . . . .	280
D.7 Múltiplos carregamentos . . . . .	283
D.8 Geração automática de malhas em áreas . . . . .	284
D.9 Geração automática de malha em volumes . . . . .	286
D.10 Simetria em volumes . . . . .	289
D.11 Estrutura modelada por elementos de placa . . . . .	292

## List of Figures

1.1 Corpo considerado como meio contínuo e sua discretização em elementos finitos. . . . .	26
1.2 Superposição das matrizes dos elementos na matriz global. . . . .	27
2.1 Barra submetida a uma força de tração $P$ . . . . .	30
2.2 Deformação em vigas. . . . .	31
2.3 Estrutura elástica sob ação de forças $F_1, \dots, F_n$ . . . . .	33
2.4 Mola de constante elástica $k$ . . . . .	34
2.5 Estados de deslocamentos para a mola. . . . .	35
2.6 Elemento de barra plana segundo o sistema de referência local $\bar{X}$ . . . . .	36
2.7 Elemento da barra no sistema global $XY$ . . . . .	38
2.8 Treliça analisada estaticamente. . . . .	40
2.9 Numeração dos nós, graus de liberdade e elementos. . . . .	41
2.10 Elemento de viga plana segundo o sistema de referência local $\bar{X}\bar{Y}$ . . . . .	48
2.11 Estados cinemáticos para a viga. . . . .	48
2.12 Exemplo de viga plana. . . . .	50
2.13 Elemento de viga com flexão e tração. . . . .	54
2.14 Transformação global-local para o elemento de viga com tração e flexão. . . . .	55
2.15 Viga com esforços de flexão e tração. . . . .	56
2.16 Exercícios 2.1 e 2.2. . . . .	58
3.1 Interface gráfica do ANSYS. . . . .	60
3.2 Módulos do programa ANSYS. . . . .	61
3.3 Definição do título da análise. . . . .	62
3.4 Definição do tipo de elemento. . . . .	63
3.5 Menu de tipos de elementos. . . . .	64

3.6	Finalizando a seleção do tipo de elemento.	64
3.7	Definição das constantes reais para os elementos.	65
3.8	Definição da área da seção transversal das barras 1 a 4.	66
3.9	Definição das constantes do conjunto 1.	66
3.10	Definição da área da seção transversal das barras 5 e 6.	67
3.11	Finalizando as definições das constantes reais.	67
3.12	Definição do modelo de material.	68
3.13	Definição do módulo de elasticidade do material.	68
3.14	Definição dos nós usando a opção <i>Working Plane</i> .	69
3.15	Definição das coordenadas nodais do nó 1.	70
3.16	Definição das coordenadas nodais do nó 4.	70
3.17	Definição dos atributos dos elementos 1 a 4.	71
3.18	Criação dos elementos 1 a 4.	72
3.19	Criação do elemento 1.	72
3.20	Criação do elemento 4.	73
3.21	Finalizando a definição dos elementos 1 a 4.	73
3.22	Seleção do segundo conjunto de constantes reais.	74
3.23	Criação do elemento 5.	74
3.24	Malha final da treliça.	75
3.25	Janela para indicar os números dos nós com apoios.	75
3.26	Definição dos apoios em UX e UY dos nós 1 e 4.	76
3.27	Treliça com os apoios.	76
3.28	Aplicação da força sobre o nó 4.	77
3.29	Mostrando a força aplicada ao nó 4.	78
3.30	Tabela com as forças nodais na treliça.	78
3.31	Início da solução.	79
3.32	Conclusão do processo de solução.	79
3.33	Definição da tabela de resultados dos elementos.	80
3.34	Leitura dos valores das forças axiais.	81
3.35	Leitura dos valores da tensão normal.	81
3.36	Tabela final de resultados.	82
3.37	Geometria deformada da treliça.	83
3.38	Listagem da tabela de resultados.	83
3.39	Tabela com os resultados de força e tensão normais nos elementos.	84
3.40	Gráfico de força normal nas barras.	84
3.41	Representação gráfica para os resultados de forças normais nas barras.	85
3.42	Seleção da coluna de resultados da tensão normal.	85
3.43	Representação gráfica para a tensão normal nas barras.	86
3.44	Forças de reação para os nós 1 e 2.	86
3.45	Tabela com os valores das reações de apoio.	87
3.46	Solução nodal.	87
3.47	Finalizando o programa.	88

3.48	Tipo de elemento BEAM3 para a viga.	90
3.49	Definição das propriedades geométricas dos elementos de viga.	91
3.50	Criação do primeiro nó da viga.	92
3.51	Criação do quarto nó da viga.	92
3.52	Uso do comando FILL.	93
3.53	Criação dos nós com o comando FILL.	93
3.54	Malha final da viga.	94
3.55	Tabela de resultados nos elementos da malha da viga.	94
3.56	Geometria deformada da viga.	95
3.57	Listagem das forças normal e cortante e do momento fletor para os nós dos elementos de viga.	95
3.58	Listagem das tensões normais para os nós dos elementos de viga.	96
3.59	Listagem das tensões normais resultantes para os nós dos elementos de viga.	96
3.60	Selecionando a força cortante em cada nó dos elementos de viga.	97
3.61	Diagrama da força cortante.	98
3.62	Seleção do momento fletor em cada nó dos elementos de viga.	98
3.63	Diagrama do momento fletor.	99
3.64	Resultados gráficos para a coluna SDPI.	99
3.65	Resultados gráficos para a coluna SDPJ.	100
3.66	Resultados gráficos para a coluna SBI.	100
3.67	Resultados gráficos para a coluna SBJ.	101
3.68	Força nodal equivalente.	101
3.69	Treliça do exercício 3.1.	103
3.70	Viga do exercício 3.2.	103
4.1	Corpo submetido à ação de um sistema de forças externas.	106
4.2	Elemento infinitesimal de um corpo em torno do ponto $P$ .	106
4.3	Plano $xy$ do elemento infinitesimal utilizado para a determinação das deformações específicas $\varepsilon_{xx}$ , $\varepsilon_{yy}$ e distorção $\gamma_{xy}$ .	107
4.4	Elemento infinitesimal submetido a um gradiente de temperatura $\Delta T$ .	111
4.5	Distribuição de esforços internos na seção transversal do corpo.	112
4.6	Componentes de um estado geral de tensão em um ponto $O$ do corpo tridimensional.	113
4.7	Corpo sólido submetido a um sistema de forças externas.	115
4.8	Partes inferiores do corpo sólido obtidas pelos cortes através dos planos $mm$ e $nn$ .	116
4.9	Componentes de tensão no ponto $O$ do corpo tridimensional.	117
4.10	Tetraedro elementar no ponto $O$ e suas componentes médias de tensão.	117
4.11	Paralelepípedo elementar com suas componentes médias de tensão.	120
5.1	Diagrama força $\times$ deslocamento para a deformação de um corpo.	128

5.2	Diagrama de tensão × deformação.	129
5.3	Momento fletor na seção transversal da viga.	130
5.4	Projeção da área elementar $dS$ sobre o plano $yz$ .	133
5.5	Esfôrgos externos em uma barra.	137
5.6	Esfôrgos externos em uma viga.	138
5.7	Meio contínuo discretizado por elementos finitos.	141
5.8	Polinômios de Hermite e suas derivadas.	149
5.9	Vigas do exercício 5.2.	152
6.1	Mapeamento entre os sistemas de referência global $X$ e local $\xi$ .	153
6.2	Transformação entre os sistemas de referência global e local.	154
6.3	Transformação entre os sistemas de referência global e local utilizando funções de forma.	155
6.4	Pontos no sistema de referência local $\xi$ .	156
6.5	Elemento unidimensional linear.	157
6.6	Elemento unidimensional quadrático.	158
6.7	Elemento unidimensional cúbico.	160
6.8	Elemento unidimensional quártico.	161
6.9	Elemento quadrangular linear.	162
6.10	Elementos lagrangianos quadrangulares.	163
6.11	Elementos finitos subparamétrico, isoparamétrico e superparamétrico.	163
6.12	Exemplo de transformação entre os sistemas de referência local e global utilizando-se as funções de forma.	165
6.13	Exemplo de transformação de um arco de círculo.	166
6.14	Condição para que os elementos quadrangulares linear e quadrático não apresentem distorção.	168
6.15	Exercícios 6.2, 6.4 e 6.5.	171
7.1	Triângulo de Pascal.	175
7.2	Elementos planos da família serendipity.	177
7.3	Função de forma para os nós do quadrado linear.	177
7.4	Elemento quadrático da família serendipity.	178
7.5	Funções de forma para os nós do elemento quadrático.	179
7.6	Elemento quadrangular cúbico.	181
7.7	Funções de forma do elemento cúbico.	183
7.8	Funções de forma para os elementos quadrático e cúbico da família lagrangiana.	184
7.9	Elemento quadrangular quártico.	185
7.10	Funções de forma para os nós do elemento quártico.	186
7.11	Elementos espaciais linear, quadrático e cúbico.	186
7.12	Elemento espacial linear.	187
7.13	Elemento espacial quadrático.	189

7.14 Elemento espacial de terceiro grau. . . . .	190
8.1 Coordenadas de área para triângulos. . . . .	194
8.2 Elementos triangulares. . . . .	195
8.3 Elemento triangular linear. . . . .	196
8.4 Funções de interpolação para o triângulo linear. . . . .	197
8.5 Elemento triangular quadrático. . . . .	197
8.6 Funções de interpolação para o triângulo quadrático. . . . .	199
8.7 Elemento triangular cúbico. . . . .	201
8.8 Funções de interpolação para o triângulo cúbico. . . . .	201
8.9 Elemento triangular quártico. . . . .	203
8.10 Funções de interpolação para o triângulo quártico. . . . .	203
8.11 Coordenadas de volume: componente $L_1$ . . . . .	207
8.12 Tetraedros linear, quadrático e cúbico. . . . .	208
8.13 Tetraedro linear. . . . .	208
8.14 Tetraedro quadrático. . . . .	210
8.15 Tetraedro cúbico. . . . .	212
8.16 Exercício 8.1. . . . .	213
9.1 Pontos igualmente espaçados para a técnica de integração de Newton-Cotes. . . . .	216
9.2 Pontos de integração de Gauss-Legendre para os elementos unidimensionais. . . . .	217
9.3 Pontos de integração para os elementos quadrangulares planos. . . . .	223
9.4 Pontos de integração para os elementos triangulares planos. . . . .	223
10.1 Chapa sob estado plano de tensão. . . . .	227
10.2 Muro de arrimo sob pressão lateral e um rolamento sob compressão diametral. . . . .	234
10.3 Sólido axisimétrico. . . . .	235
10.4 Componentes de deformação em coordenadas cilíndricas. . . . .	236
10.5 Elemento infinitesimal no plano $r\theta$ . . . . .	236
10.6 Plano $r\phi$ para um elemento infinitesimal. . . . .	237
10.7 Elemento de volume infinitesimal para um sólido de revolução. . . . .	239
10.8 Problema de estado plano de tensão calculado com esquemas de integração consistente e reduzida. . . . .	242
A.1 Sistema cartesiano de referência. . . . .	248
D.1 Treliça analisada. . . . .	270
D.2 Viga em estudo. . . . .	271
D.3 Pórtico analisado. . . . .	273
D.4 Eixo analisado. . . . .	276

D.5	Sistema de vigas equivalente ao eixo. . . . .	277
D.6	Viga analisada com malha de quadrados e estado plano de tensão. . . . .	279
D.7	Chapa com furo submetida a um pressão interna uniforme. . . . .	281
D.8	Geração automática de malha em problema plano. . . . .	284
D.9	Viga analisada como problema espacial utilizando cubos de oito nós. . . . .	287
D.10	Disco gerado utilizando a simetria do problema. . . . .	290
D.11	Estrutura modelada por elementos de placa. . . . .	292

## Listas de Tabelas

2.1	Coordenadas nodais da treliça. . . . .	41
2.2	Incidência, comprimento, área e cosenos diretores dos elementos de barra. . . . .	41
2.3	Graus de liberdade correspondentes às linhas e colunas nas quais devem ser superpostas as matrizes dos elementos. . . . .	42
2.4	Deformação específica e tensão normal nos elementos da treliça analisada. . . . .	46
2.5	Áreas das barras a cada iteração do dimensionamento. . . . .	47
2.6	Tensões nas barras a cada iteração do dimensionamento. . . . .	47
2.7	Números dos nós e graus de liberdade do exemplo da viga. . . . .	51
2.8	Solução analítica calculada nos nós do exemplo da viga. . . . .	53
6.1	Relação entre os índices $a$ , $b$ e $c$ para o elemento quadrangular linear. . . . .	162
7.1	Relação entre os índices $a$ , $b$ e $c$ para o elemento quadrático. . . . .	176
7.2	Relação entre os índices $a$ , $b$ e $c$ para o elemento cúbico. . . . .	182
7.3	Relação entre os índices $a$ , $b$ e $c$ para o elemento quártico. . . . .	185
7.4	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento espacial linear. . . . .	188
7.5	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento espacial quadrático. . . . .	189
7.6	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento espacial de terceiro grau. . . . .	191
8.1	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento linear. . . . .	196
8.2	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento quadrático. . . . .	198
8.3	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento cúbico. . . . .	201
8.4	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ e $d$ para o elemento quártico. . . . .	202
8.5	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ , $d$ e $e$ para o tetraedro linear. . . . .	209
8.6	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ , $d$ e $e$ para o tetraedro quadrático. . . . .	209
8.7	Relação entre os índices $a$ , $b$ , $c$ , $d$ e $e$ para o tetraedro cúbico. . . . .	211
9.1	Coeficientes de ponderação para as fórmulas de quadratura de Newton-Cotes. . . . .	216
9.2	Pontos de integração e coeficientes de ponderação para a quadratura de Gauss-Legendre para o intervalo $(-1, 1)$ . . . . .	217

9.3	Ordem de integração para os elementos unidimensionais. . . . .	220
9.4	Pontos de integração e coeficientes de ponderação para elementos quadrangulares planos. . . . .	222
9.5	Ordem de integração para os elementos quadrangulares planos. . . . .	223
9.6	Pontos de integração e coeficientes de ponderação para elementos triangulares planos. . . . .	224
9.7	Pontos de integração e ponderações para os tetraedros. . . . .	225
10.1	Ordem de integração consistente e reduzida para o cálculo da matriz de rigidez dos elementos quadrangulares planos. . . . .	241