



Sequência didática

Probabilidades

Nesta sequência didática, será abordado o conceito de probabilidade por meio da resolução de problemas envolvendo contagem.

A BNCC na sala de aula

Objetos de conhecimento	O princípio multiplicativo da contagem. Princípio multiplicativo da contagem. Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral.
Competência específica	4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
Habilidades	(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo. (EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
Objetivos de aprendizagem	Compreender o princípio fundamental da contagem. Construir e interpretar diagramas de árvores de possibilidades. Compreender os conceitos de espaço amostral e de eventos. Calcular probabilidade simples.
Conteúdo	Probabilidade.

Materiais e recursos

- Moedas.
- Caderno.

- Lápis.

Desenvolvimento

- Quantidade de aulas: 4.

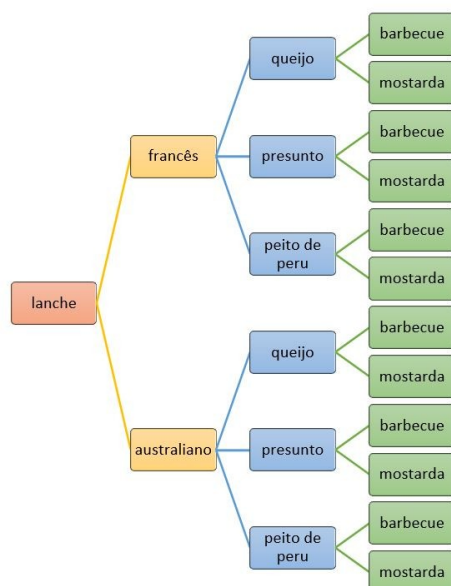
Aulas 1 e 2

Iniciar a aula perguntando aos alunos se conhecem alguma lanchonete em que o cliente monta o lanche, escolhendo as opções de ingredientes que o irão compor. Simular, na lousa, algumas opções de lanches, colocando dois tipos de pães (francês e australiano), três tipos de recheio (queijo, presunto e peito de peru) e dois tipos de molho (*barbecue* ou mostarda). Utilizar letras para as opções de pão, recheio e molho a fim de facilitar a construção da estrutura do problema.

Deixar claro para os alunos que isso é apenas uma simulação, pois, na realidade, costumam estar disponíveis mais ingredientes. Questionar sobre como é possível calcular a quantidade total de possibilidades de lanches diferentes que podem ser criados com essas opções de ingredientes. Organizar os alunos em duplas e pedir para que, juntos, pensem em uma forma de representar a quantidade total de possibilidades de lanches.

Após alguns minutos, solicitar o compartilhamento de soluções de algumas duplas com o restante da turma. A partir do que for apresentado, comentar que existe uma maneira de estruturar essas opções que é bastante usada em Matemática: a árvore de possibilidades. Construir a árvore de possibilidades para esse caso com os alunos, mostrando como é o processo em detalhes.

Para o problema anterior, a árvore de possibilidades pode ser a seguinte:



Elaborado pelo autor.

Mostrar aos alunos que, para determinar a quantidade total de possibilidades de lanches para esse caso, utilizando a árvore de possibilidades construída, basta contar o número de figuras existentes na última faixa vertical do diagrama. Nesse caso, a quantidade total de possibilidades é 12. Questionar como eles poderiam obter esse valor sem construir a árvore de possibilidades. Pedir para algumas duplas compartilharem novamente seus pensamentos, oferecendo a oportunidade de fala para as duplas que não participaram ainda. Usar as soluções dos alunos para mostrar que uma forma de determinar a quantidade total de lanches possíveis é multiplicar a quantidade de opções de ingredientes de cada tipo: 2 pães, 3 recheios e 2 molhos, o que implica em realizar o cálculo $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Solicitar para que, em duplas, criem uma situação-problema em que seja possível aplicar a mesma estratégia. Pedir para que troquem entre as duplas a situação criada de modo que uma dupla resolva um problema elaborado por outra dupla. Orientar para que as resoluções contenham tanto a árvore de possibilidades do problema dado, quanto os cálculos numéricos.

Para finalizar a aula, propor a seguinte situação-problema para os alunos: em uma sorveteria há 10 sabores de sorvetes de frutas e 6 sabores que contém algum tipo de chocolate. Fazer as seguintes perguntas para os alunos:

- De quantos modos diferentes uma pessoa pode comprar um sorvete de um único sabor?

16 sabores, pois $10 + 6 = 16$.

- Quantas são as possibilidades de montar uma taça de sorvete com duas bolas de sabores diferentes?

240 possibilidades, pois $16 \cdot 15 = 240$.

Espera-se que os alunos percebam que a forma de pensamento é análoga à apresentada anteriormente, porém fazer a árvore de possibilidades nesse caso seria bastante moroso e cansativo. Ressaltar esse aspecto com os alunos.

- Quantas possibilidades existem para montar uma taça com dois sabores diferentes de sorvetes de fruta?

90 possibilidades, pois $10 \cdot 9 = 90$. Nesse caso, o aluno deve considerar somente a totalidade de sabores de sorvetes de fruta, que são dez.

Aula 3

Iniciar a aula solicitando aos alunos que joguem uma moeda para cima uma única vez e anotem o resultado obtido (cara ou coroa). Questionar qual é o número total de resultados que seriam possíveis de serem obtidos nesse caso. A resposta esperada é dois resultados possíveis. Pedir para que listem todas as possibilidades obtidas na resposta anterior. Os estudantes deverão escrever "cara" e "coroa".

Nesse mesmo sentido, solicitar aos alunos que lancem uma moeda para cima duas vezes e anotem os resultados obtidos. Eles poderão ser um dos resultados a seguir:

Cara e coroa
Cara e cara
Coroa e cara
Coroa e coroa

Explicar que o ato de lançar uma moeda e verificar o resultado obtido caracteriza um experimento aleatório, pois é uma ação realizada conscientemente, em que não se tem controle sobre o resultado final. Explicar também que o conjunto de todos os resultados possíveis para um experimento aleatório é chamado de espaço amostral.

Exemplificar, questionando os alunos sobre o espaço amostral obtido no lançamento de um dado honesto de seis faces para o alto. A resposta esperada é números de 1 a 6, porém, os alunos não devem saber como registrar essa informação formalmente. Mostrar que a escrita matemática para espaço amostral, por exemplo, é feita como $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. No caso do lançamento de uma moeda duas vezes, o espaço amostral seria $S = \{\text{cara-cara}, \text{cara-coroa}, \text{coroa-coroa}, \text{coroa-cara}\}$.

Dizer também que cada parte ou subconjunto do espaço amostral é chamado de evento. Por exemplo, um evento seria lançar uma moeda para o alto duas vezes e obter como resultado coroa nos dois lançamentos.

Formular questionamentos, usando outros exemplos, para que os alunos assimilem melhor os conceitos. Pedir para que respondam somente após o professor autorizar, de forma que todos tenham tempo para pensar nas respostas. Perguntar, por exemplo, "qual é o espaço amostral das turmas dessa escola?" (todas as turmas da escola), "qual é o espaço amostral das disciplinas curriculares dos alunos" (todas as disciplinas que os alunos estudam), dentre outros. Pedir para pensarem em um evento relacionado com um dos exemplos citados. Por exemplo, um evento seria "escolher uma turma do 8º ano".

Aula 4

Nesta última aula, os alunos terão a oportunidade de calcular probabilidades simples. Definir probabilidades com os alunos, fazendo-os concluir que probabilidade não indica a certeza de que um evento ocorra, probabilidade é a razão entre o número de possibilidades de um evento desejado ocorrer, pelo total de possibilidades de casos possíveis desse evento. Exemplificar, usando situações cotidianas, como, por exemplo, jornais, que dizem que há 70% de probabilidade de chuva em um determinado local, mas que nem sempre chove. Questionar os alunos sobre outras situações do dia a dia que envolvem probabilidades.

Retomar os exercícios feitos nas aulas anteriores e questionar os alunos sobre algumas situações que envolvem os mesmos contextos. Fazer perguntas como "no caso do exercício da sorveteria, tínhamos 10 sabores de fruta e 6 sabores que continham algum

tipo de chocolate. Se eu comprei uma bola de sorvete escolhida por meio de um sorteio, qual é a probabilidade de que ela contenha chocolate?". A resposta deve ser $\frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 37,5\%$.
Mostrar aos alunos o significado da fração e como escrevê-la como porcentagem.

Outra questão pode ser feita envolvendo o primeiro exemplo, da lanchonete em que o cliente escolhe os ingredientes e monta seu lanche. Realizar perguntas como "das opções da lanchonete, o meu lanche preferido é de peito de peru com mostarda no pão francês. Qual é a probabilidade de algum cliente dessa lanchonete pedir um lanche idêntico a esse, sendo os ingredientes escolhidos por sorteio?". A resposta deve ser $\frac{1}{12} \cong 8,3\%$, pois o lanche preferido é único de 12 opções no total. Outras questões no mesmo contexto podem ser feitas: "qual é a probabilidade de alguém pedir um lanche com molho barbecue, sendo os ingredientes escolhidos por sorteio?". A resposta deve ser $\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = 50\%$, pois metade das opções de lanche contém esse molho.

Fazer outros questionamentos como esses para aproveitar os contextos dos problemas já conhecidos e trabalhados pelos alunos. Usar o caso das moedas para mostrar aos alunos que a soma das probabilidades de todos os eventos em um experimento aleatório é sempre 1. Perguntar "qual é a probabilidade de, ao lançar uma moeda para cima, obter o resultado cara? E coroa? Existe algum outro resultado possível para esse evento?". Mostrar aos alunos que a probabilidade de obter cara, adicionada à probabilidade de obter coroa é igual a 1. Pedir aos alunos que mostrem isso nos outros problemas trabalhados. Orientar e sanar dúvidas, quando surgirem.

Para trabalhar dúvidas

Caso algum aluno apresente dificuldades na compreensão das atividades propostas, procurar auxiliá-lo em suas dúvidas. Iniciar com exemplos mais simples, como no caso da moeda, e aumentar a complexidade desses exemplos gradativamente.

Em relação à elaboração da árvore de possibilidades, pode-se orientar o aluno na criação do diagrama, mostrando o sentido de organizá-lo dessa forma. Para o cálculo de probabilidade, auxiliar os alunos a realizar operações com fração.

Avaliação

Propor algumas atividades, como as sugeridas a seguir, para verificar se os alunos compreenderam e assimilaram os conceitos explorados nas aulas propostas nesta sequência didática.

1. Um dado honesto de seis faces é lançado para o alto. Escreva o espaço amostral desse evento e calcule a probabilidade de se obter um número par.

Resposta: Espaço amostral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e a probabilidade de se obter um número par é

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

2. Considerando o mesmo enunciado da atividade anterior, qual é a probabilidade de se obter um número maior do que 4?

Resposta: De 1 a 6 existem dois números maiores do que 4, ou seja, os números 5 e 6. Assim, a probabilidade de se jogar um dado para o alto e obter um número maior do que 4 é $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 33,3\%$.

3. Uma pessoa viajou para uma praia e levou 6 camisetas diferentes, 4 bermudas diferentes e 2 chinelos diferentes. A pessoa deseja se vestir com uma bermuda, uma camiseta e um chinelo para passear. De quantas maneiras ela poderá fazer isso?

Resposta: A escolha da camiseta não implica na escolha da bermuda e nem do chinelo. Os eventos são, portanto, independentes. Assim, basta multiplicar os números 6, 4 e 2 para obter 48, que é o total de combinações de roupas possíveis para a pessoa se vestir.

Ampliação

É possível propor aos alunos que realizem exercícios envolvendo espaços amostrais que, se representados de outras maneiras, ajudem na resolução dos problemas. Por exemplo, o lançamento de dois dados simultaneamente e a análise de seus resultados. Outra sugestão é propor a elaboração de novos problemas pelos próprios alunos e depois a troca desses entre eles, para que resolvam problemas proposto pelos colegas.